

N° d'ordre :
1746

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE
L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

MARCEL PORCHET

Ingénieur agronome.
Ingénieur du Génie rural.

1^{re} THÈSE. — ÉTUDE SUR L'ÉCOULEMENT SOUTERRAIN DES EAUX.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le *16* juin 1923 devant la Commission d'examen :

MM. KOENIGS. *Président.*

JANET..... }
VILLEY..... } *Assesseurs.*

1923

N° d'ordre :
1746

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE
L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

MARCEL PORCHET

Ingénieur agronome.
Ingénieur du Génie rural.

1^{re} THÈSE. — ÉTUDE SUR L'ÉCOULEMENT SOUTERRAIN DES EAUX.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le *16* juin 1923 devant la Commission d'examen :

MM. KOENIGS. *Président.*

JANET..... }
VILLEY..... } *Assesseurs*

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen MOLLIARD, *Professeur*. Physiologie végétale.

Doyen honoraire. . . P. APPELL.

Professeurs honoraires. { P. PUISEUX.
VÉLAIN.
BOUSSINESQ.
PRUVOT.

	Émile PICARD.	Analyse supérieure et algèbre supérieure.
	KÉNIGS.	Mécanique physique et expérimentale.
	GOURSAT.	Calcul différentiel et calcul intégral.
	HALLER.	Chimie organique.
	JOANNIS.	Chimie (Enseignement P. C. N.).
	JANET.	Électrotechnique générale.
	WALLERANT.	Minéralogie.
	ANDOYER.	Astronomie.
	PAINLEVÉ.	Mécanique analytique et mécanique céleste.
	HAUG.	Géologie.
	H. LE CHATELIER.	Chimie générale.
	Gabriel BERTRAND.	Chimie biologique.
	M ^{me} P. CURIE.	Physique générale et radioactivité.
	CAULLERY.	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
	C. CHABRIÉ.	Chimie appliquée.
	G. URBAIN.	Chimie minérale.
	Émile BOREL.	Calcul des probabilités et Physiq. mathém.
	MARCHIS.	Aviation.
	Jean PERRIN.	Chimie physique.
	ABRAHAM.	Physique.
	CARTAN.	Mécanique rationnelle.
	Cl. GUICHARD.	Géométrie supérieure.
	LAPICQUE.	Physiologie.
<i>Professeurs</i>	GENTIL.	Géographie physique.
	VESSIOT.	Théorie des groupes et calcul des variations.
	COTTON.	Physique générale.
	DRACH.	Application de l'analyse à la géométrie.
	C. FABRY.	Physique.
	Charles PÉREZ.	Zoologie.
	Léon BERTRAND.	Géologie appliquée et géologie régionale.
	DANGEARD.	Botanique.
	LESPIEAU.	Théories chimiques.
	LEDUC.	Physique théorique et Physique céleste.
	MONTÉL.	Mathématiques générales.
	MAURAIN.	Physique du globe.
	RABAUD.	Biologie expérimentale.
	WINTREBERT.	Anatomie et physiologie comparées.
	HÉROUARD.	Zoologie.
	Rémy PERRIER.	Zoologie (Enseignement P. C. N.).
	SAGNAC.	Physique théorique et Physique céleste.
	PORTIER.	Physiologie.
	BLAISE.	Chimie organique.
	PÉCHARD.	Chimie (Enseignement P. C. N.)
	AUGER.	Chimie analytique.
	M. GUICHARD.	Chimie minérale.
	GUILLET.	Physique.

Secrétaire Daniel TOMBECK.



A Monsieur le Professeur KÖENIGS,

*Mon président de thèse, en remerciement et
en reconnaissance de son accueil, de ses
conseils et de l'aide bienveillante que j'ai
trouvée chez lui à l'occasion de ce travail.*



Digitized by the Internet Archive
in 2026

ÉTUDE SUR L'ÉCOULEMENT SOUTERRAIN DES EAUX

PAR

M. PORCHET

INGÉNIEUR AGRONOME

INGÉNIEUR DU GÉNIE RURAL

INTRODUCTION

Quelques recherches expérimentales et de nombreuses études théoriques ont été faites sur l'écoulement souterrain des eaux.

Au point de vue expérimental, un résumé complet des recherches faites en 1881 relativement au passage des liquides à travers les substances perméables et les couches filtrantes, est donné dans l'introduction d'une thèse soutenue devant la Faculté des sciences de Toulouse, par M. J. Brunhes.

Parmi les expériences citées, presque toutes ont trait au passage des liquides dans les tubes et orifices capillaires ou à travers des substances filtrantes de nature diverse.

Seules les expériences faites par MM. Darcy et Ritter en 1865 ont eu pour but de mesurer les lois de l'écoulement de l'eau à travers les colonnes de sable.

La colonne de sable utilisée avait une hauteur de 3^m,50, et la charge a varié entre 1^m,11 et 13^m,93. Les rapports du débit à la charge ont varié, dans la même série d'expériences, de plus du sixième de leur valeur.

Darcy formulait ses conclusions sous une forme assez réservée :

« Il paraît donc que, pour un sable de même nature, on peut admettre que le volume débité est proportionnel à la charge et en raison inverse de l'épaisseur de la couche traversée. »

Par ailleurs, presque toutes ces expériences avaient été faites sous de fortes charges. Or, pour l'étude de l'écoulement souterrain des eaux, il faut envisager uniquement le cas où la charge est inférieure à l'épaisseur de la couche traversée. C'est donc sur la vérification de la loi dans ces conditions que doivent principalement porter les expériences.

M. J. Brunhes, dans la thèse précitée, étudie bien l'écoulement dans le cas où le rapport de la charge à la colonne traversée (que nous appellerons pente motrice) est inférieur à 1. Mais il opère avec des tubes de très petit diamètre (de 10 à 29^{mm},5) et des sables assez gros, puisque les grains du sable qu'il désigne par (4 — 6) ont une dimension moyenne de 0^{mm},466.

Dans ces conditions, l'influence de l'écoulement marginal peut, à notre avis, fausser quelque peu les résultats.

Il est donc intéressant de vérifier à nouveau cette loi pour des pentes motrices inférieures à l'unité et avec des tubes d'un diamètre supérieur à celui adopté par M. J. Brunhes.

* * *

M. J. Brunhes formule ainsi le 6^o de ses conclusions :

« Les lois précédentes sont en défaut quand le niveau du liquide s'abaisse en dessous du sommet de la colonne filtrante ; de nouvelles actions interviennent alors et modifient profondément le débit. Il faut en tenir compte dans l'étude du régime des sources. »

Or, dans le mouvement souterrain des eaux, le cas signalé par M. Brunhes existe en permanence, puisque la surface libre de l'eau est constamment à l'intérieur du sol.

Il y a donc lieu de préciser l'influence des nouvelles actions

signalées par M. Brunhes, et particulièrement celle de la capillarité.

Dupuit semble négliger cette influence, car il écrit (1) :

« On sait que, dans le mouvement ordinaire, la vitesse de l'eau sortant d'un vase qui se vide va toujours en diminuant : ici (cas d'un vase rempli d'un terrain perméable), la vitesse de l'eau est constante et ne dépend que de la perméabilité du terrain et de l'inclinaison de la conduite.

« Le temps nécessaire pour obtenir une diminution de niveau y serait évidemment $t = \frac{\mu}{i} y$, et par conséquent le temps

nécessaire pour vider la conduite : $T = \frac{\mu}{i} H$.

« Si la conduite était verticale, on aurait $i = I$ et par conséquent $t = \mu y$. »

Or ceci revient à supposer, dans le cas d'une colonne verticale, que la charge est égale à la hauteur de la colonne de sable traversée, c'est-à-dire qu'aucune influence particulière ne se manifeste à la surface de l'eau lorsqu'elle est située à l'intérieur du sable.

M. Boussinesq écrit à ce sujet (2) :

« A une seconde approximation, il y aurait lieu de tenir compte de la réduction que j'appellerai ζ éprouvée par la pression p et par la charge z , dans la nappe, à raison de la *tension superficielle* de l'eau sur chacun des innombrables *ménisques* capillaires constituant la surface libre souterraine, réduction uniforme et invariable dans le cas d'un sol homogène pour le moins autant que l'est, aux profondeurs supposées, la température elle-même et fonction déterminée de x et de y au même degré d'approximation dans un sol ayant sa structure variable d'une verticale à l'autre. » Mais l'énoncé de cette proposition n'a pas été précédé, à notre connaissance, d'expériences établissant qu'au point de vue *dynamique*, la

(1) DUPUIT, Études sur le mouvement des eaux, p. 249.

(2) BOUSSINESQ, *J. math. pures et appliquées*, 1904, IV, p. 21.

capillarité agit dans un sol homogène par une réduction constante de la charge.

Il est très intéressant d'étudier cette question au point de vue expérimental.

* * *

Enfin, le débit d'une nappe souterraine dépend du volume vide qui lui est accessible pour son mouvement. Il est donc nécessaire d'étudier expérimentalement quelle fraction du volume total du sol est parcourue par l'eau en mouvement.

Dupuit (1) semble admettre que ce volume est égal à celui des vides géométriques du terrain où se meut la nappe.

C'est également le vide géométrique du sable que M. J. Brunhes cherche à déterminer au n° 147 de sa thèse.

Or, rien ne prouve *a priori* que le volume entier des vides soit occupé par de l'eau en mouvement, et cette question doit, à notre avis, être étudiée expérimentalement.

* * *

Si peu d'expériences ont été faites sur le mouvement souterrain des eaux, par contre, de nombreuses et remarquables applications des résultats trouvés à l'hydrodynamique souterraine ont été faites par MM. Dupuit, Boussinesq, Pochet, Limasset et Maillet, qui se sont appliqués à analyser les phénomènes complexes qui se produisent dans le mouvement des nappes de grande étendue.

Nous aborderons, au cours de cette étude, un problème de moins grande envergure, et nous chercherons surtout à appliquer les résultats trouvés aux nappes de peu d'étendue que l'on a à étudier à l'occasion des travaux d'améliorations agricoles.

Leurs faibles dimensions, qui ne nous permettent pas de négliger certains éléments tels que l'influence capillaire, auto-

(1) DUPUIT, Études sur le mouvement des eaux, p. 233.

risent par ailleurs certaines simplifications, ainsi que l'emploi de méthodes différentes de celles utilisées pour les nappes de grande étendue.

*
* *
*

En résumé, nous nous proposons, dans le présent travail :

1^o D'étudier expérimentalement les points ci-après :

a. Vérification, pour des pentes motrices inférieures à l'unité, de la loi de filtration énoncée par Darcy.

b. Influence de la capillarité.

c. Mesure de la fraction de volume d'un terrain perméable occupée par l'eau en mouvement.

2^o De rechercher des procédés pratiques de mesure des constantes spécifiques d'un terrain au point de vue des phénomènes de filtration.

3^o D'appliquer les résultats trouvés à l'étude du mouvement souterrain des nappes de faible étendue.

PREMIÈRE PARTIE

VÉRIFICATION ET RECHERCHE EXPÉRIMENTALES DES LOIS D'ÉCOULEMENT SOUTERRAIN DES EAUX

I. Description des dispositifs expérimentaux utilisés.

Nous avons fait deux séries d'expériences :

La première, en 1921, à la Station agronomique d'Amiens.

La deuxième, en 1922, à la Station expérimentale d'hydraulique agricole de Paris.

a. Appareil utilisé pour les expériences faites en 1921 :

Dans notre première série d'expériences, l'appareil utilisé se composait (disposition n° 1, fig. 1, 2 et 3) d'un réservoir R où arrivait par le tuyau A l'eau du service d'eau. Un trop-plein Tp maintenait le niveau constant dans ce réservoir. Une chaînette *d*, passant sur une poulie *p*, permettait d'élever ou d'abaisser ce réservoir et par suite le niveau du trop-plein. Par ce dispositif, on pouvait donc maintenir à diverses hauteurs un plan d'eau fixe, quel que soit le débit de la canalisation.

Par ailleurs, un tube en verre T de 81^{mm},3 de diamètre intérieur et de 45 centimètres de hauteur, avait sa partie inférieure scellée au plâtre dans un manchon en cuivre à brides M, sur lequel étaient serrées, à l'aide d'un collier en bronze et de six écrous à oreilles :

1° Une rondelle annulaire en caoutchouc ;

2° Une toile métallique recouverte d'une très mince couche de coton hydrophile et surmontée d'une mousseline.

Ce dispositif empêchait le passage des sables les plus fins que l'on pouvait mettre dans le tube et, par contre, n'opposait au passage de l'eau qu'une résistance insignifiante, ainsi qu'il était possible de s'en assurer en faisant

ELEVATION

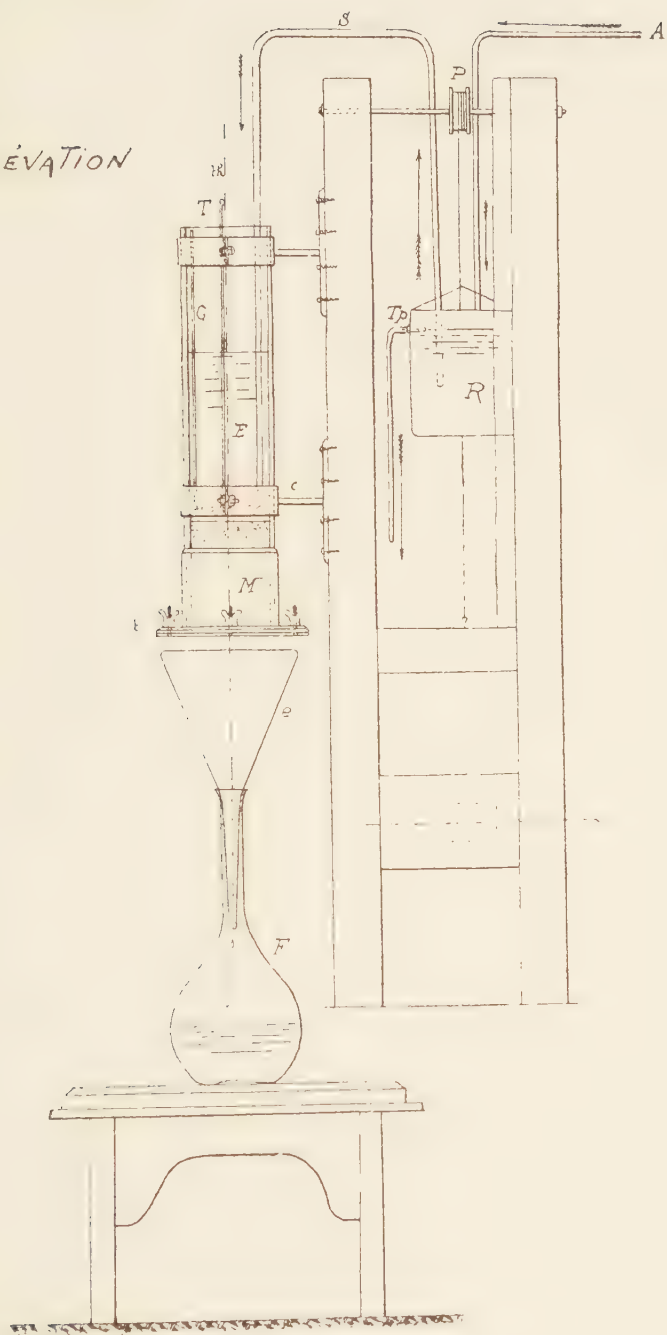


Fig. 1. — Disposition n° 1.

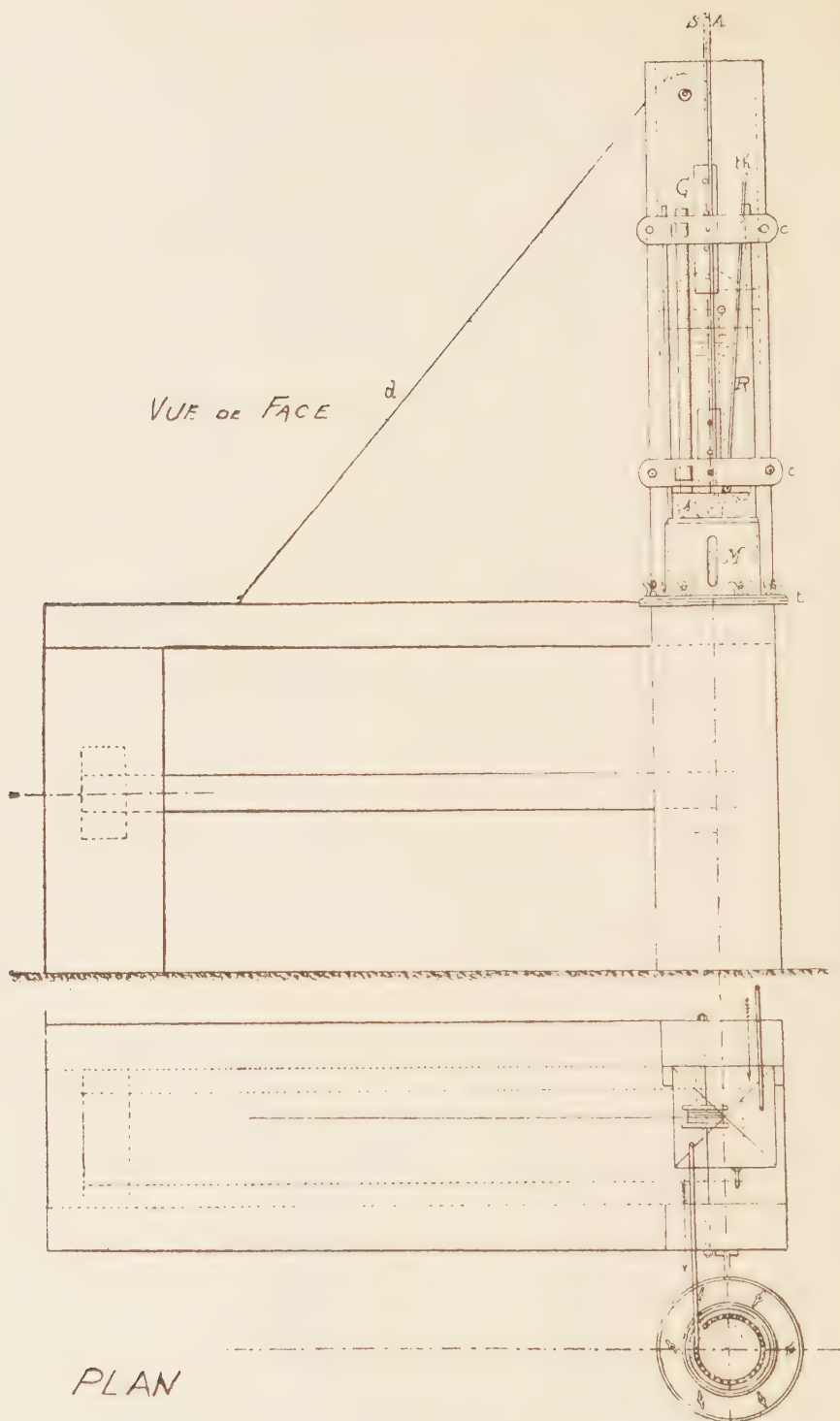


Fig. 2 et 3. — Disposition n° 1.

passer dans le tube non garni de sable un fort courant d'eau.

Ce tube portait en G une graduation en millimètres dont le 0 se trouvait au niveau de la mousseline formant le fond du tube.

Ce tube était rempli de sable jusqu'à une certaine hauteur.

Il était nécessaire de prendre certaines précautions lors du remplissage du tube, pour rendre les expériences comparables.

Les sables étaient introduits dans le tube complètement imprégnés d'eau et par quantités toujours égales, mesurées à l'aide d'une capsule en porcelaine et correspondant à une hauteur d'environ 2 centimètres dans le tube.

Après l'introduction du contenu de chaque capsule dans le tube, il était procédé, à l'aide du dispositif indiqué à la figure 4, à un tassement du sable. Un pilon muni d'un manche était soulevé de 10 centimètres et

retombait sur le sable. Cette opération était renouvelée dix fois. Un curseur mobile sur le manche du pilon permettait de régler facilement la hauteur de chute.

Lorsque le tube était rempli de sable à la hauteur voulue, nous le faisons parcourir pendant plusieurs heures par un

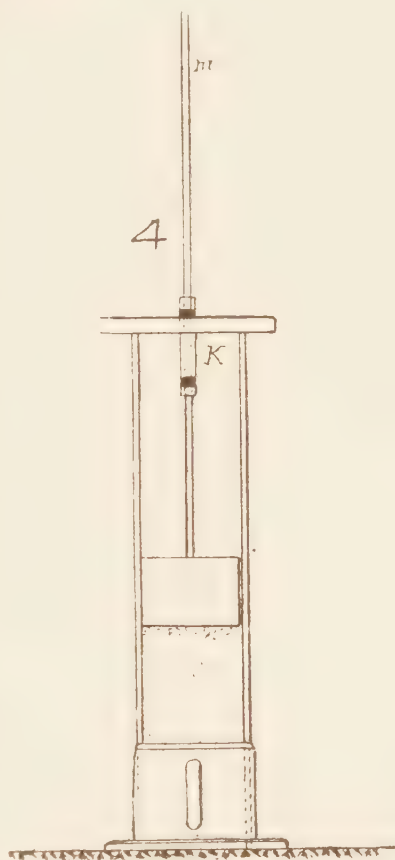


Fig. 4.

courant d'eau, de manière à parachever le tassement du sable. Nous arrivions par ce procédé à obtenir une colonne de sable qui, pratiquement, ne subissait plus de modifications dans son tassement, ainsi qu'il était possible de le constater par la constance de son niveau supérieur et par l'examen des grains de sable à travers le tube de verre.

Cetube, une fois rempli de sable dans les conditions ci-dessus indiquées, était mis en communication avec le réservoir R par un siphon S. L'extrémité de ce siphon débouchant au-dessus du sable était munie d'un serpentín perforé de nombreux trous à sa partie supérieure. Cette disposition avait pour but d'éviter que le courant d'eau arrivant par le siphon ne déforme par affouillement la partie supérieure de la colonne de sable.

Un thermomètre *th* placé dans le tube T permettait de mesurer la température de l'eau amenée sur le sable.

Enfin, un entonnoir et un ballon jaugé F permettaient de mesurer l'eau écoulee à travers la colonne de sable.

Cette disposition n° 1 permettait d'étudier les débits pour des colonnes de sable de faible longueur et des pentes motrices supérieures à l'unité.

*
*
*

En vue de l'étude des débits pour des pentes motrices inférieures à 1, l'appareil était complété (disposition n° 2, fig. 5) par un coude C à angle droit s'adaptant à la partie inférieure du manchon M et prolongé lui-même par un tube T' identique au tube T, mais muni de deux manchons. Des dispositifs de tamisage (toile métallique, mousseline, coton hydrophile) étaient installés en l_1 et l_2 , et la colonne de sable, qui était horizontale, était comprise entre l_1 et l_2 . La pente motrice était alors égale à la hauteur du niveau constant de l'eau au-dessus de l'axe du tube T' divisée par la longueur $l_1 l_2$ de la colonne de sable. Elle pouvait, par conséquent, devenir inférieure à l'unité.

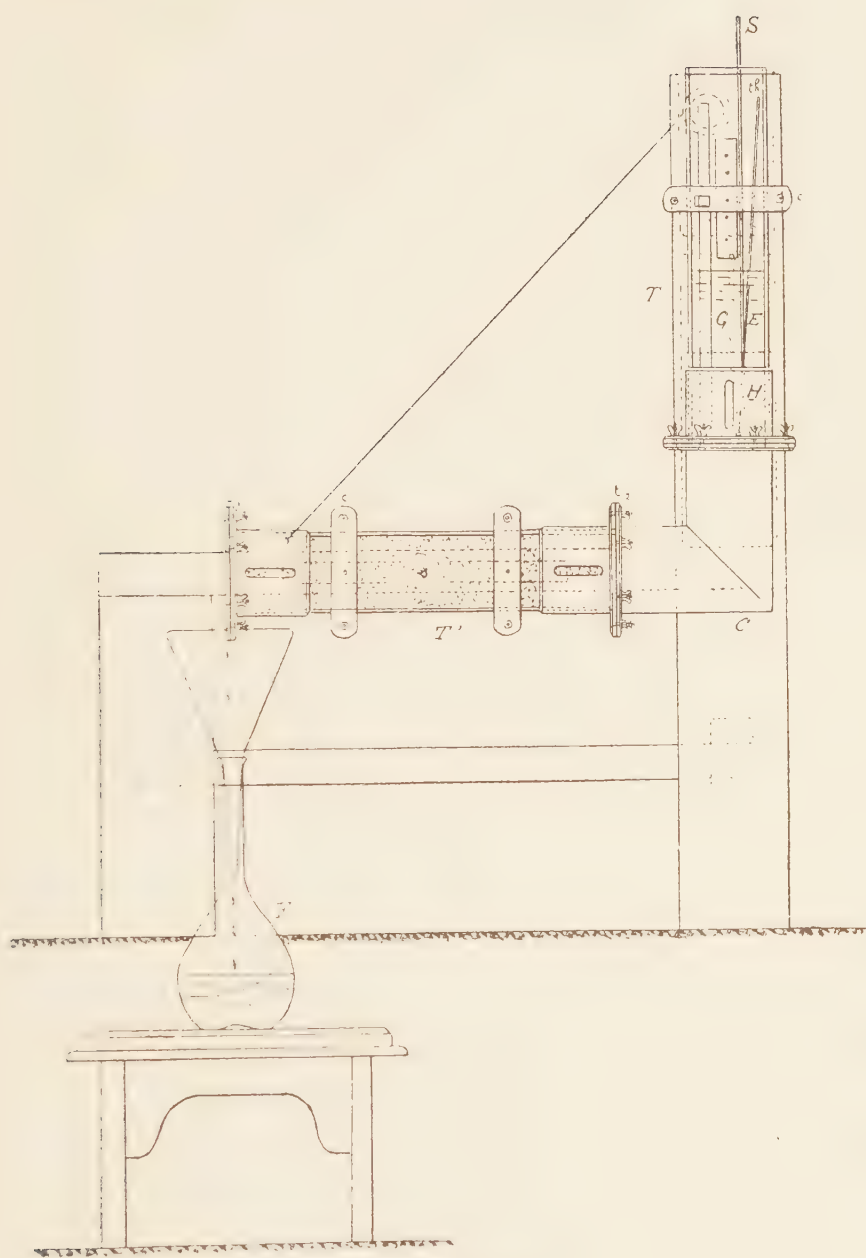


Fig. 5. — Disposition n° 2.

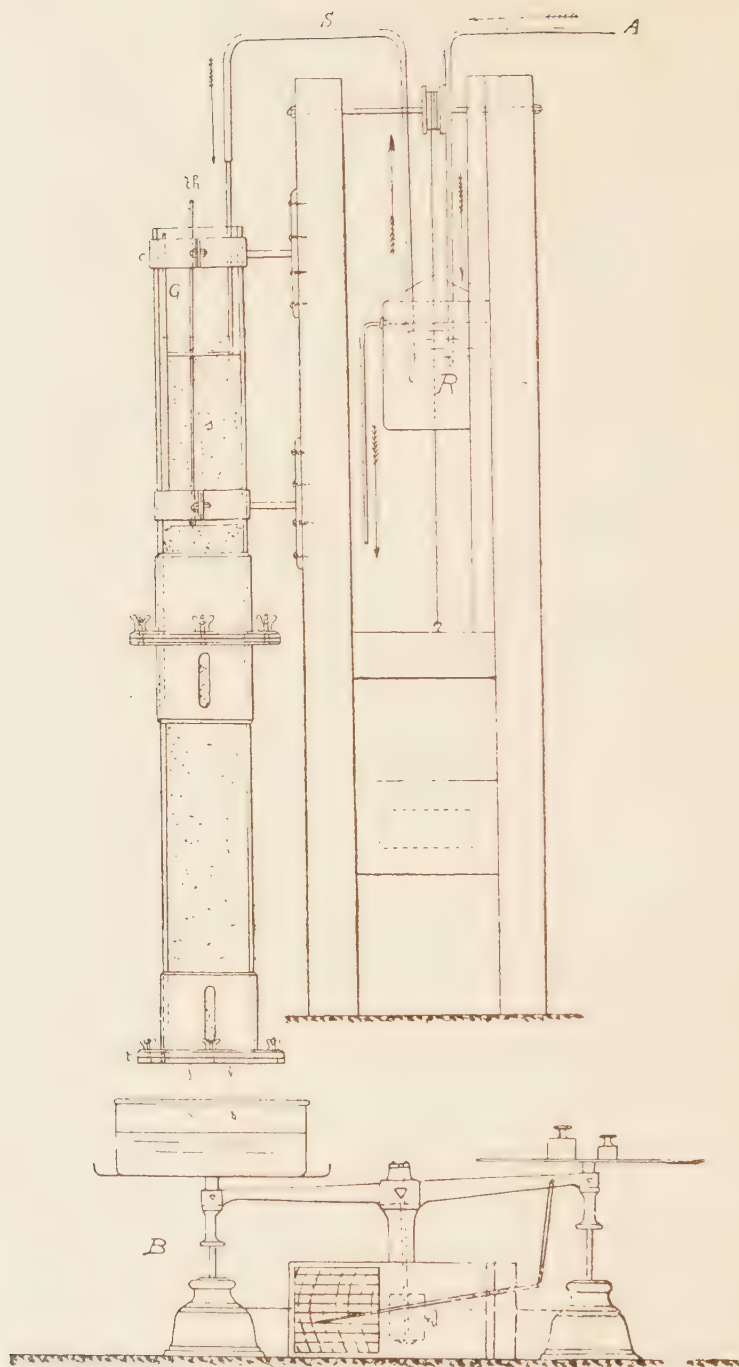


Fig 6. — Disposition n° 3

*
* *

Enfin, dans un troisième dispositif (fig. 6), le tube T' était mis en rallonge et verticalement à la suite du tube T. Il était possible ainsi d'opérer sur des colonnes de sable de plus grande longueur et d'étudier en particulier le mouvement de l'eau, lorsque le plan d'eau se trouve en dessous du niveau de la colonne de sable. Cette étude nécessitait la mesure de débits variables, et l'eau sortant du tube T' tombait dans un cristalliseur placé sur l'un des plateaux d'une balance enregistreuse qui donnait en fonction du temps la quantité d'eau écoulée.

b. *Appareil utilisé pour les expériences faites en 1922.*

L'appareil utilisé pour nos expériences de 1921 présentait certaines déficiences qui nous ont amené à lui apporter des modifications lors des expériences que nous avons faites en 1922.

*
* *

Nous avons utilisé, pour nos premières expériences, un tube en verre. Ce matériau présentait, en raison de sa transparence, l'avantage de permettre de voir ce qui se passait sur la périphérie de la colonne de sable. Mais, à l'époque où nous avons construit notre appareil, il était très difficile de s'approvisionner en tubes en verre de gros diamètre et de grande longueur, alors que nous aurions désiré avoir un tube de 10 centimètres de diamètre pour écarter nettement l'influence de l'écoulement marginal (1), nous n'avons pu nous

(1) Nous avons fait au cours de l'année 1921 des expériences en vue de rechercher le diamètre minimum à observer.

Ces expériences étaient conduites de la manière suivante : un niveau constant était maintenu dans trois tubes de diamètres différents à l'aide d'un dispositif de trop-plein et de siphons. Ce dispositif est schématisé à la figure ci-jointe.

Ces tubes étaient remplis du même sable sur la même hauteur et leurs parties inférieures se trouvaient dans le même plan horizontal.

On peut donc admettre que les trois tubes se trouvaient dans des condi-

procurer qu'un tube de $81\text{mm},3$, et encore sa cylindricité laissait-elle beaucoup à désirer, les sections étant légèrement

tions identiques au point de vue de l'écoulement et qu'ils différaient seulement par leurs diamètres.

Nous avons opéré sur de faibles hauteurs, car il était possible de trouver des tubes de verre de faible longueur et d'une cylindricité parfaite, alors que

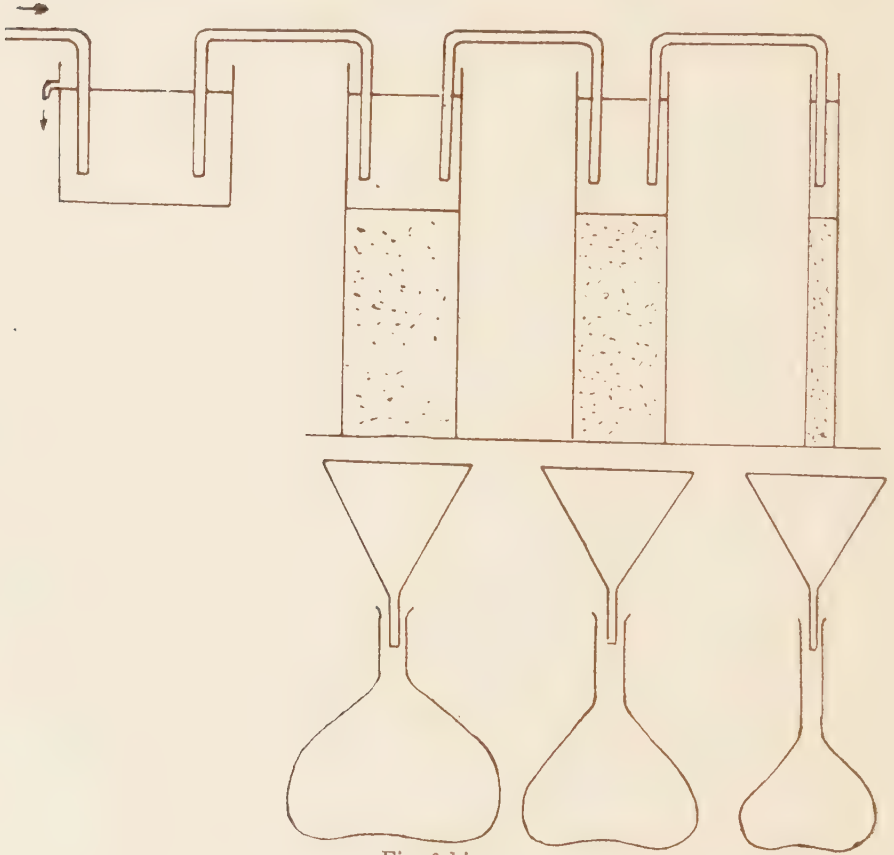


Fig. 6 bis.

cette qualité n'était pas facilement réalisable avec des tubes de grande longueur.

Nous avons mesuré les quantités d'eau écoulées à travers les divers tubes au bout de la même durée d'écoulement.

ovalisées et inégales sur la longueur du tube. Ce défaut, qui n'avait pas une très grande importance lorsque nous opérons

Les résultats des expériences sont consignés ci-après :

1° *Expérience du 26 mars 1921.*

Sable expérimenté : sable de grève des Sables-d'Olonne.

Diamètre des tubes : 0,10, 0,08 et 0,025.

Longueur des colonnes de sable : 0,20.

Charge initiale : 0,300.

— finale : 0,300.

— moyenne : 0,300.

Durée de l'expérience : 600 secondes.

Quantités d'eau écoulées :

A travers le tube de 0,10.....	1 072 grammes.
— — 0,08.....	686 —
— — 0,025.....	69 —

Si nous faisons le rapport de la quantité d'eau écoulée aux sections des tubes, nous trouvons les chiffres ci-après

$$\text{Tube de 0,10 : } \frac{0,001072}{0,007854} = 0,1365.$$

$$\text{Tube de 0,08 : } \frac{0,000686}{0,005027} = 0,1364.$$

$$\text{Tube de 0,025 : } \frac{0,000069}{0,000491} = 0,1405.$$

L'écoulement dans les tubes de 0^m,10 et de 0^m,08 est donc, aux erreurs d'expériences près, proportionnelle à la surface, alors que l'écart pour un tube de 0^m,025 est beaucoup plus grand.

2° *Expérience du 28 mars 1921.*

Sable expérimenté : sable de grève des Sables-d'Olonne.

Diamètre des tubes : 0,10, 0,08 et 0,025.

Longueur des colonnes de sable : 0,20.

Charge initiale : 0,305.

— finale : 0,303.

— moyenne : 0,304.

Durée de l'expérience : 1 800 secondes.

avec un plan d'eau fixe, entachait d'erreur nos résultats dans nos mesures à charge variable.

Quantités d'eau écoulées :

A travers le tube de 0,10.....	3 252 grammes.
— — — 0,08.	2 085 —
— — — 0,025.....	210 —

Si nous faisons le rapport de la quantité d'eau écoulée aux sections des tubes, nous trouvons les chiffres ci-après :

$$\begin{aligned} \text{Pour le tube de 0,10: } & \frac{0,003252}{0,007854} = 0,4143 \\ \text{Pour le tube de 0,08: } & \frac{0,002085}{0,005027} = 0,4147 \\ \text{Pour le tube de 0,025: } & \frac{0,00021}{0,000491} = 0,4277 \end{aligned}$$

On constate encore que, pour les tubes de 0^m,10 et de 0^m,08, il y a, à très peu de chose près, proportionnalité entre les quantités d'eau écoulées et les sections des tubes, alors qu'il n'en est pas de même pour le tube de 0^m,025.

Ces résultats peuvent encore être interprétés d'une autre manière qui permet de chiffrer l'influence de l'écoulement marginal.

L'écoulement à travers la masse de la colonne de sable est proportionnel à la surface de la section droite de cette colonne, soit à d^2 , d étant le diamètre.

L'écoulement marginal est proportionnel au périmètre de la section droite de cette colonne, c'est-à-dire à d .

Si donc les quantités d'eau écoulées peuvent être exprimées en fonction du diamètre par une relation de la forme :

$$q = ad^2 + bd$$

le premier terme représentera la quantité d'eau écoulée au travers de la colonne de sable et le deuxième terme représentera la quantité d'eau écoulée à la périphérie.

Or, les résultats des expériences du 26 mars peuvent être mis sous la forme :

$$q = 0,1061 d^2 + 0,00011 d$$

et ceux des expériences du 28 mars sous la forme :

$$q = 0,3216 d^2 + 0,00036 d.$$

Comme, par ailleurs, nous avons pu constater, au cours de nos premières expériences, que la méthode adoptée pour le tassement du sable donnait de bons résultats et que, par suite, la transparence du tube n'était plus nécessaire, nous avons adopté pour nos expériences de 1922 un tube en cuivre de 10 centimètres de diamètre et de 90 centimètres de hauteur, dont la cylindricité est parfaite.

La disposition ainsi réalisée est indiquée à la figure n° 7.

Or, les tubes que nous avons employés par la suite avaient les diamètres ci-après :

Tube de verre employé au cours des expériences de 1921 à Amiens : 0^m,0813.

Tube de cuivre employé au cours des expériences de 1922 à Paris : 0^m,1000.

En appliquant les formules ci-dessus à un tube de 0,0813 de diamètre on voit que la quantité d'eau s'écoulant à la périphérie est de :

$$0,00011 \times 0,0813 = 0,000008943,$$

alors que la quantité d'eau s'écoulant à travers la colonne de sable est de :

$$0,1051 \times 0,0813^2 = 0,007010.$$

La quantité d'eau s'écoulant à la périphérie est donc 1,2 p. 100 seulement de la quantité d'eau passant au travers de la colonne.

Avec un tube de 0^m,10 de diamètre, cette proportion tombe à un peu plus de 1 p. 100.

Sil'on considère que les lois ont été vérifiées au cours des expériences avec une erreur relative de 5 p. 100, on voit que l'influence de l'écoulement marginal est suffisamment écartée par l'emploi d'un tube d'un diamètre supérieur à 0^m,08

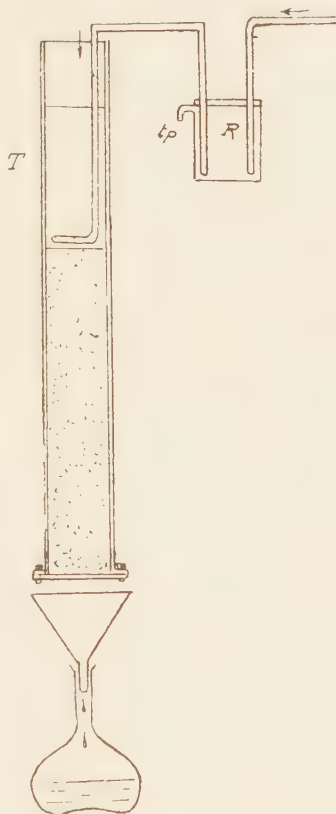


Fig. 7.

*
* *

Le dispositif n° 2 employé par nous, en 1921, pour mesurer les débits dans le cas des pentes motrices inférieures à l'unité, ne permet pas de descendre à de très faibles valeurs pour les pentes motrices, car il est nécessaire que le niveau du plan d'eau soit sensiblement supérieur à la génératrice supérieure

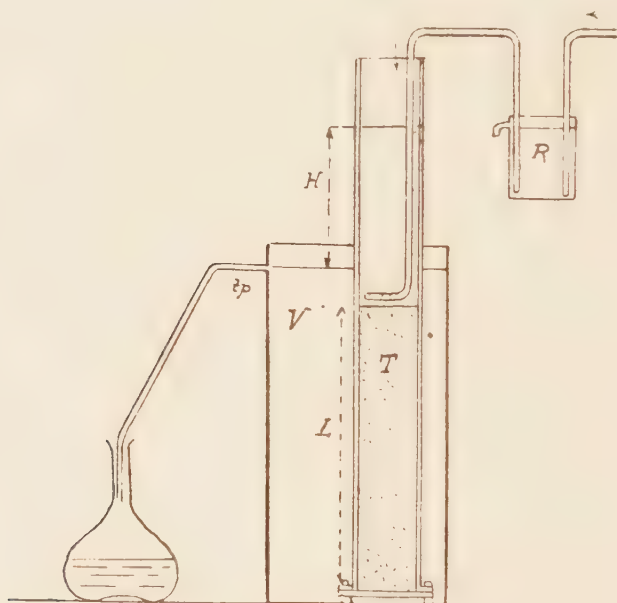


Fig. 8.

du tube T', car sans cela toute la masse du sable ne serait pas parcourue par l'eau.

Dans nos expériences de 1922, nous avons adopté pour mesurer les débits dans le cas de pentes motrices inférieures à 1, le dispositif schématisé à la figure 8.

Le tube T plonge par sa partie inférieure dans un vase V muni d'un trop-plein *tp*.

Le niveau se maintient constant dans le vase V et l'eau

qui passe par le trop-plein est celle écoulee à travers la colonne de sable. Elle est mesurée dans un flacon jaugé F.

La charge est la différence de niveau H entre le plan d'eau fixé et le niveau du trop-plein du vase V. En appelant L la longueur de la colonne de sable, la pente motrice est $\frac{L}{H}$ et on peut la rendre aussi petite que l'on désire.

* * *

Enfin, la balance enregistrante employée lors de nos expériences de 1921 tournait trop lentement (un tour en cent quatre minutes) et avait trop peu d'amplitude dans ses mesures (200 grammes). Nous avons, pour nos expériences de 1922, construit un enregistreur de niveau dont le fonctionnement se comprend par l'examen de la figure 9. Cet appareil fait un tour en une heure et peut enregistrer 1 000 grammes.

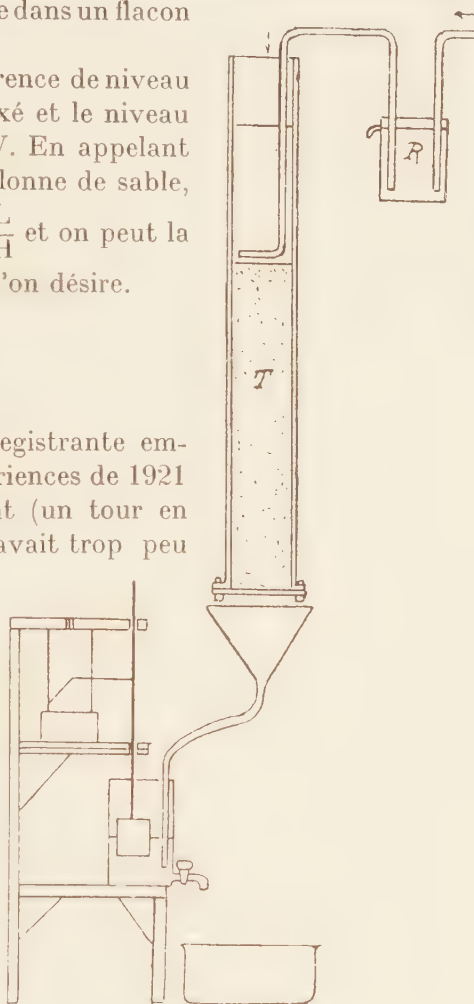


Fig. 9.

c. Sables et terres étudiés.

Tous les sables étudiés ont été, avant emploi, lavés complètement à plusieurs eaux jusqu'à ce que les eaux de lavage soient devenues complètement limpides.

Les expériences ont porté sur les catégories de sable ci-après :

1^o Sable de carrière de Ponthieu (Somme).

2^o Sable de grève des Sables-d'Olonne.

3^o Sable des sablières de Viroflay.

4^o Sable de rivière trié en trois catégories :

A. Passant au tamis de 16 et ne passant pas au tamis de 30.

B. Passant au tamis de 30 et ne passant pas au tamis de 50.

C. Passant au tamis de 50 et ne passant pas au tamis de 100.

Enfin, des expériences ont été faites avec de la terre végétale siliceuse provenant du jardin de l'Institut national agronomique.

II. — Vérification, pour des pentes motrices inférieures à l'unité, de la loi de filtration énoncée par Darcy.

Nous avons, fait au cours des années 1921 et 1922, de nombreuses expériences destinées à vérifier si la loi de proportionnalité du débit au quotient de la charge par l'épaisseur de la couche traversée s'appliquait encore lorsque ce quotient devenait très petit.

Nous avons utilisé lors de nos expériences de 1921 :

a. L'appareil représenté aux figures 1, 2 et 3 pour les pentes motrices supérieures à l'unité.

b. L'appareil représenté à la figure 5 pour expérimenter simultanément les pentes motrices supérieures et inférieures à l'unité.

En 1922, nous avons utilisé :

a. L'appareil représenté à la figure 7 pour les pentes motrices supérieures à l'unité.

b. L'appareil représenté à la figure 8 pour les pentes motrices inférieures à l'unité.

Pour rendre les résultats bien comparables, nous opérions sur la même colonne de sable dans les deux cas.

Les résultats de ces expériences ont été consignés dans les tableaux ci-après, dont les deux premières colonnes indiquent la hauteur d'eau au-dessus de la surface d'écoulement, au début et à la fin de l'expérience.

La troisième colonne donne la moyenne de ces quantités que nous considérons comme applicable à toute la durée de l'expérience.

La quatrième colonne donne la pente motrice, c'est-à-dire le quotient de la hauteur d'eau par la longueur de la colonne de sable.

La cinquième colonne indique le temps nécessaire pour emplir le flacon gradué.

La sixième colonne donne le débit par unité de surface. Ce nombre est obtenu en divisant le volume du flacon gradué par le temps employé à le remplir et par la surface de la section intérieure du tube. Nous appellerons cette quantité : vitesse apparente.

Enfin, dans la septième colonne, figure le quotient de la vitesse apparente par la charge qui, si la loi se vérifie, doit garder une valeur constante.

Les unités employés sont le mètre et la seconde.

PREMIÈRE SÉRIE D'EXPÉRIENCES.

19 juillet 1921.

Sable expérimenté : sable de grève des Sables-d'Olonne.

Longueur de la colonne de sable : 0,443.

Capacité du flacon gradué : 0,00025.

Section de la colonne de sable : 0,005154.

Température initiale : 19°,5.

— finale : 20°.

— moyenne : 19°,75.

Hauteurs d'eau			Pentes motrices.	Temps de remplissage du flacon.	Vitesses apparentes.	K.
Début.	Fin.	Moyennes.				
0,520	0,512	0,5160	1,160	290	0,000167	0,000144
0,430	0,425	0,4275	0,965	360	0,000135	0,000140
0,325	0,310	0,3175	0,717	480	0,000101	0,000141
0,287	0,286	0,2865	0,649	525	0,0000924	0,000142
0,253	0,252	0,2525	0,570	590	0,0000822	0,000144
0,198	0,198	0,1980	0,447	735	0,0000663	0,000148
Moyenne						0,000143
Écart maximum : 0,000148 — 0,000143 = 0,000005 = 3,5 p. 100						

DEUXIÈME SÉRIE D'EXPÉRIENCES.

20 juillet 1921.

Sable expérimenté : sable de grève des Sables-d'Olonne.

Longueur de la colonne de sable : 0,102.

Capacité du flacon gradué : 0,0005.

Section de la colonne de sable : 0,005281.

Température initiale : 20°,5.

— finale : 21°.

— moyenne : 20°,75.

Hauteurs d'eau.			Pentes motrices.	Temps de remplissage du flacon.	Vitesses apparentes.	K.
Début.	Fin.	Moyennes.				
0,268	0,263	0,2655	2,603	241	0,000393	0,000151
0,220	0,220	0,2200	2,157	272	0,000348	0,000161
0,178	0,178	0,1780	1,745	338	0,000280	0,000160
0,142	0,142	0,1420	1,392	426	0,000222	0,000160
0,114	0,112	0,1130	1,108	436	0,000177	0,000160
Moyenne						0,0001584
Écart maximum : 0,0001584 — 0,000151 = 0,0000074 = 4,7 p. 100						

TROISIÈME SÉRIE D'EXPÉRIENCES.

3 août 1921.

Sable expérimenté : sable de grève des Sables-d'Olonne.

Longueur de la colonne de sable : 0,443.

Capacité du flacon gradué : 0,0005.

Section de la colonne de sable : 0,005281.

Température initiale : 20°.

— finale : 20°,5.

— moyenne : 20°,25.

Hauteurs d'eau			Pentes motrices.	Temps de remplissage du flacon.	Vitesses apparentes.	K.
Début.	Fin.	Moyennes.				
0,373	0,373	0,373	0,842	382	0,000127	0,000151
0,339	0,339	0,339	0,765	417	0,000116	0,000152
0,292	0,292	0,292	0,659	491	0,0000988	0,000150
0,245	0,245	0,245	0,553	583	0,0000832	0,000150
0,281	0,281	0,281	0,634	513	0,0000946	0,000149
0,327	0,327	0,327	0,738	452	0,000107	0,000145
0,365	0,365	0,365	0,824	407	0,000119	0,000145
0,432	0,432	0,432	0,975	350	0,000139	0,000143
0,471	0,471	0,471	1,063	323	0,000150	0,000141
0,524	0,524	0,524	1,183	293	0,000166	0,000140
Moyenne.....						0,0001466
Écart maximum : 0,0001466 — 0,000140 = 0,0000066 = 4,5 p. 100						

Remarque. — Ces trois séries d'expériences ont porté sur le même sable. Elles ont donné au cours de chaque série des écarts dans la valeur de K n'atteignant pas 5 p. 100 de la valeur moyenne.

Ces valeurs moyennes sont :

Première série	0,000143
Deuxième —	0,0001584
Troisième —	0,0001466

Pour rendre comparables ces trois résultats, il faut tenir compte des températures différentes auxquelles ont été effectuées ces diverses séries d'expériences :

Première série	19 ^o ,75
Deuxième —	20 ^o ,75
Troisième —	20 ^o ,25

En appliquant au coefficient K la formule de Poiseuille pour l'écoulement à travers les tubes capillaires :

$$K_t = K_0 (1 + 0,0336793 \, t + 0,00220936 \, t^2),$$

on obtient :

CINQUIÈME SÉRIE D'EXPÉRIENCES.

26 août 1921.

Sable expérimenté : sable de carrière de Ponthieu.

Longueur de la colonne de sable : 0,443.

Capacité du flacon gradué : 0,000250.

Section de la colonne de sable : 0,005154.

Température initiale : 20°.

— finale : 20°.

— moyenne : 20°.

Hauteurs d'eau.			Pentes motrices.	Temps de remplissage du flacon	Vitesses apparentes.	K.
Début.	Fin.	Moyennes.				
0,381	0,381	0,3810	0,860	441	0,000110	0,000128
0,342	0,343	0,3425	0,773	519	0,0000935	0,000121
0,290	0,290	0,2900	0,655	602	0,0000806	0,000123
0,250	0,252	0,2510	0,566	725	0,0000669	0,000118
0,238	0,237	0,2375	0,536	780	0,0000622	0,000116
0,285	0,284	0,2845	0,642	620	0,0000782	0,000122
0,331	0,331	0,3310	0,749	540	0,0000884	0,000118
0,348	0,348	0,3480	0,785	498	0,0000974	0,000124
0,470	0,470	0,4700	1,061	406	0,000119	0,000112
0,541	0,541	0,5410	1,221	330	0,000147	0,000120
Moyenne.....						0,0001202
Écart maximum : 0,0001202 — 0,0001120 = 0,0000082 = 6,8 p. 100						

Remarque. — Dans les quatrième et cinquième séries d'expériences, le sable expérimenté était le même. Les écarts dans la valeur de K ont atteint au maximum 6,8 p. 100 de sa valeur moyenne.

Les valeurs moyennes sont :

Quatrième série	0,0001222
Cinquième —	0,0001202

Ces résultats sont comparables, puisque la température était la même au cours de ces deux séries.

Ils sont satisfaisants, car les valeurs moyennes de K dans les deux séries sont sensiblement égales.

SIXIÈME SÉRIE D'EXPÉRIENCES.

27 juillet 1922.

Sable expérimenté : sable de rivière, catégorie B.

Longueur de la colonne de sable : 0,500.

Capacité du flacon gradué : 0,001.

Section de la colonne de sable : 0,007854.

Hauteurs d'eau.			Pentes motrices.	Temps de remplissage du flacon.	Vitesses apparentes.	K.
Début.	Fin.	Moyennes.				
0,814	0,814	0,814	1,628	145,5	0,000876	0,000538
0,700	0,700	0,700	1,400	177,5	0,000717	0,000512
0,285	0,285	0,285	0,570	409,5	0,000311	0,000545
0,197	0,197	0,197	0,394	581	0,000219	0,000555
0,054	0,054	0,054	0,108	2112	0,0000603	0,000558
Moyenne.....						0,0005416
Écart maximum : 0,0005416 — 0,0005120 = 0,0000296 = 5,4 p. 100.						

SEPTIÈME SÉRIE D'EXPÉRIENCES.

4 août 1922.

Sable expérimenté : sable de rivière, catégorie C.

Longueur de la colonne de sable : 0,639.

Capacité du flacon gradué : 0,001.

Section de la colonne de sable : 0,007854.

Hauteurs d'eau			Pentes motrices.	Temps de remplissage du flacon.	Vitesses apparentes.	K.
Début.	Fin.	Moyennes.				
0,112	0,112	0,112	0,175	4 331	0,0000293	0,000169
0,373	0,373	0,373	0,584	1 272	0,000100	0,000171
0,800	0,800	0,800	1,252	602	0,000211	0,000169
Moyenne.....						0,000170
Écart maximum : 0,000170 — 0,000169 = 0,000001 = 0,6 p. 100.						

HUITIÈME SÉRIE D'EXPÉRIENCES.

14 août 1922.

Sable expérimenté : sable de rivière, catégorie A.

Longueur de la colonne de sable : 0,754.

Capacité du flacon gradué : 0,001.

Section de la colonne de sable : 0,007854.

Hauteurs d'eau.			Pentes motrices.	Temps de remplissage du flacon.	Vitesses apparentes.	K.
Début.	Fin.	Moyennes.				
0,854	0,854	0,854	1,132	35	0,00364	0,00321
0,360	0,360	0,360	0,477	70	0,00182	0,00381
0,267	0,267	0,267	0,354	95	0,00134	0,00379
Moyenne.....						0,00360
Écart maximum : 0,00360 — 0,00321 = 0,00039 = 10,8 p. 100.						

Les résultats trouvés dans ces dernières expériences sont les plus défectueux, puisqu'ils accusent un écart maximum de 10 p. 100 environ sur la valeur moyenne de K.

Ce fait s'explique facilement si l'on considère qu'en raison de la valeur élevée de K, le flacon jaugé se remplit très rapidement et qu'une erreur d'une seconde à la lecture des instants de début et de fin de l'expérience peut entraîner une erreur de deux secondes sur la durée du remplissage du flacon. Cette durée étant, dans la première expérience, de trente-cinq secondes, l'erreur relative pour la détermination de la valeur K est de 6 p. 100 environ.

*
* *

Dans l'ensemble des expériences que nous avons faites, les écarts maxima des valeurs trouvées pour K par rapport à sa valeur moyenne sont de l'ordre de grandeur de 5 p. 100, et cela quelle que soit la longueur de la colonne de sable et quelle que soit la charge.

Si l'on envisage qu'au cours des expériences de Darcy, l'erreur relative fut, dans la même série, égale à 1/6, soit

16,6 p. 100, il est permis de considérer que les expériences ci-dessus constituent une vérification plus précise de la loi de Darcy et permettent de l'étendre au cas de pentes motrices inférieures à l'unité et même très faibles.

III. — Influence de la capillarité.

Ainsi que nous l'avons exposé dans l'introduction, deux hypothèses ont été émises au sujet des actions qui interviennent lorsque le niveau du liquide s'abaisse au-dessous du sommet de la colonne filtrante.

D'après Dupuit, la loi de filtration ne serait pas modifiée et le débit resterait constant, puisque la pente motrice serait constante (et égale à l'unité dans le cas d'une colonne verticale).

D'après M. Boussinesq, au contraire, la charge se trouve diminuée d'une quantité constante. M. Boussinesq ne précise pas quelle est cette quantité, mais il est à présumer qu'elle doit être représentée par la hauteur à laquelle s'élèverait, par capillarité, de l'eau placée à la base inférieure de la colonne.

En tous cas, aucune expérience n'a été faite, à notre connaissance, pour vérifier l'une ou l'autre de ces hypothèses.

M. Brunhes signale simplement l'existence de nouvelles actions intervenant dans ces conditions, sans préciser la nature de ces actions et sans les expérimenter.

* * *

Pour faire ces expériences, nécessaires à notre avis, nous avons utilisé, en 1921, le dispositif de la figure n° 5, et, en 1922, celui de la figure n° 9.

Dans l'un et l'autre cas, le principe de la méthode était le même :

Après avoir laissé l'appareil fonctionner à pression constante pendant un certain temps, nous retirions le siphon S et supprimions ainsi la communication entre le réservoir à niveau constant et le tube T. Le tube T se vidait donc et

l'eau écoulee était envoyée dans l'appareil enregistreur (balance enregistreuse ou enregistreur de débit).

Cet appareil traçait une courbe C (fig. 10) donnant en fonction du temps t le volume de l'eau écoulee e .

Soit x le point de cette courbe correspondant à l'instant

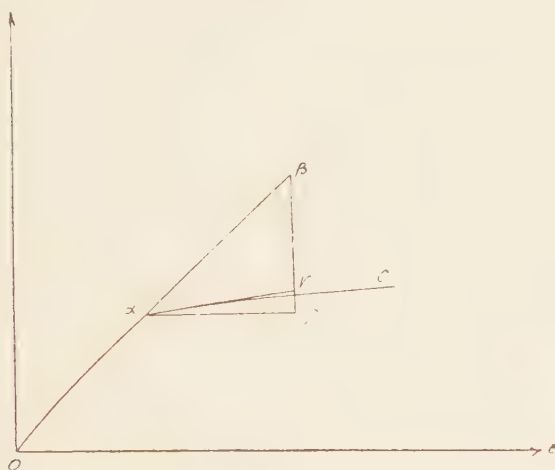


Fig. 10.

où la surface de l'eau atteint le sommet de la colonne de sable.

A partir de ce moment, si l'hypothèse de Dupuit est exacte, le débit doit rester constant. Or le débit n'est autre que le coefficient angulaire de la tangente à la courbe C. L'appareil enregistreur devrait donc tracer une droite $x\beta$ se confondant en x avec la tangente à la branche ox de la courbe.

Dans l'hypothèse de M. Boussinesq, la charge qui était H (hauteur de la colonne de sable) au point x , lorsque la surface du liquide était très peu en dessus de la surface du sable, se trouve brusquement diminuée d'une quantité constante γ , lorsque la surface du liquide est très peu en dessous de la surface du sable.

La charge devient donc : $H - \gamma$.

La pente motrice passe de $\frac{H}{H} = 1$ à $\frac{H - \eta}{H}$

Le débit qui est proportionnel à la pente motrice variera donc brusquement dans le rapport $\frac{H - \eta}{H}$ et le coefficient angulaire de la tangente à la courbe C, qui représente le débit, variera donc également brusquement dans le même rapport. Si donc nous menons en $\alpha\gamma$ la tangente à la branche αC de la courbe, en $\alpha\delta$ une parallèle à Ot et en $\beta\gamma\beta$ une parallèle à Oe , nous aurons :

$$\frac{\frac{\gamma\delta}{\alpha\delta}}{\frac{\beta\gamma}{\alpha\delta}} = \frac{H - \eta}{H}$$

d'où :

$$\eta = H \frac{\beta\gamma}{\beta\delta}$$

Les expériences faites ont pour but de vérifier laquelle des deux hypothèses de Dupuit ou de M. Boussinesq correspond à la réalité et de comparer la quantité constante η trouvée en appliquant la théorie de M. Boussinesq à la hauteur à laquelle l'eau s'élève par capillarité dans une colonne du sable expérimenté.

*
* *

Les figures 11 à 20 donnent les graphiques tracés par les appareils enregistreurs. Il apparaît immédiatement sur ces graphiques que l'hypothèse de Dupuit est à rejeter, car il y a bien, au moment du passage de l'eau sous la surface du sable, une diminution brusque du débit.

Le tableau ci-après résume les expériences que nous avons faites à ce sujet.

N ^o du graphi- que.	DATE de l'expérience.	NATURE du sable.	HAUTEUR de la colonne de sable H.	γ .	$\gamma\delta$.	$\gamma = H \times \frac{\gamma}{\delta}$.
11	9 août 1921.	Grève, Sables- d'Olonne.	0,554	20	31	0,358
12	11 — —	Grève, Sables- d'Olonne.	0,550	20	27	0,407
13	22 — —	Rivière, cat. B.	0,603	12	25	0,290
14	22 — —	— B.	0,603	12	31	0,311
15	25 — —	— C.	0,560	24,5	33	0,416
16	25 — —	— C.	0,560	27,5	41	0,375
17	14 — 1922.	— A.	0,754	16,5	124	0,100
18	27 juill. 1922.	— B.	0,500	31	57,5	0,270
19	4 août —	— C.	0,639	40	66	0,387
20	22 — —	Carrière, Viro- flay.	0,754	23,5	28	0,633

SABLE DE GRÈVE DES SABLES
D'OLONNE

$H = 0,554$

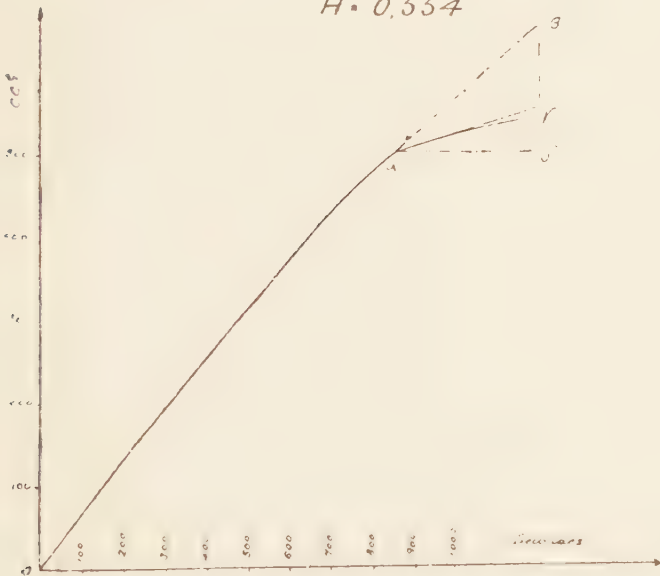


Fig. 11.

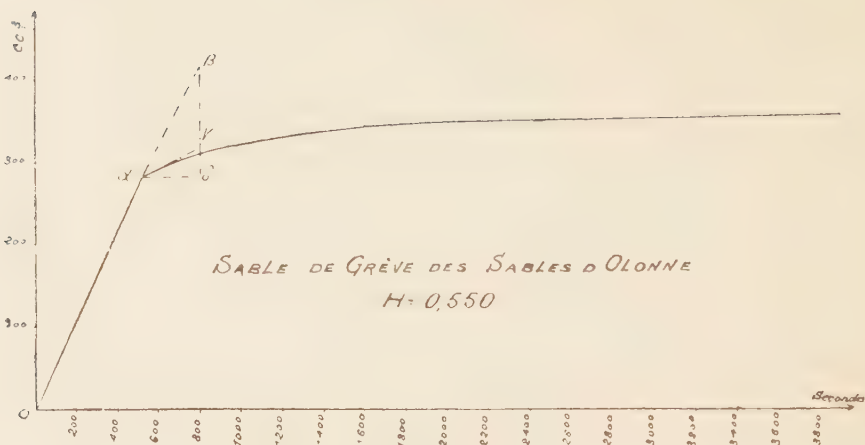


Fig. 12.

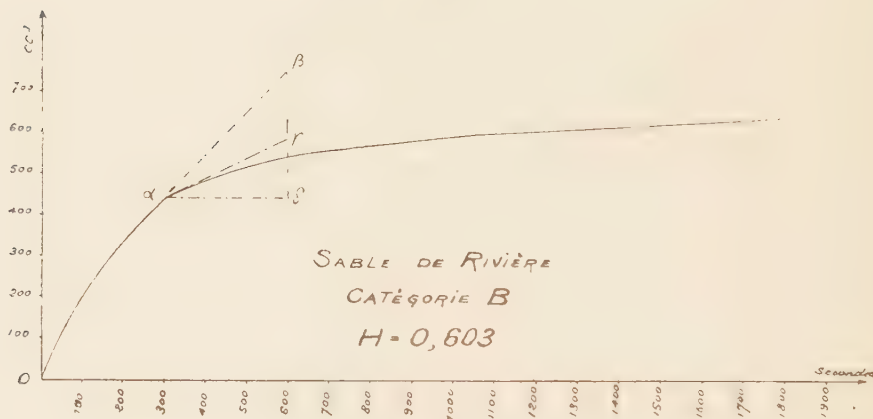


Fig. 13.

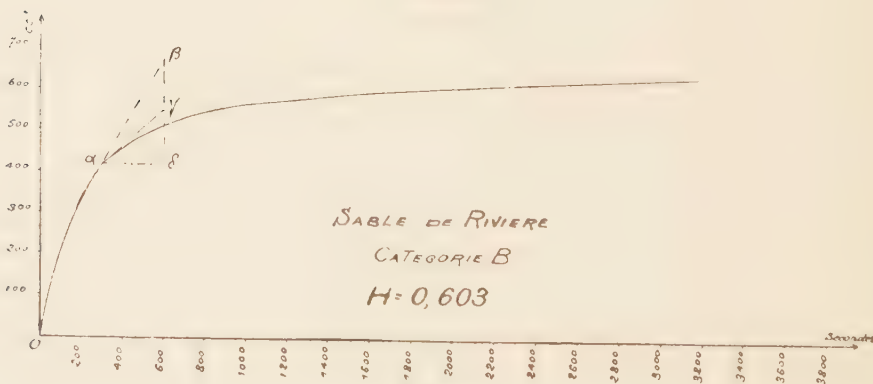


Fig. 14.

SABLE DE RIVIÈRE

CATÉGORIE C

$H = 0,560$



Fig. 15.

SABLE DE RIVIÈRE

CATÉGORIE C

$H = 0,560$

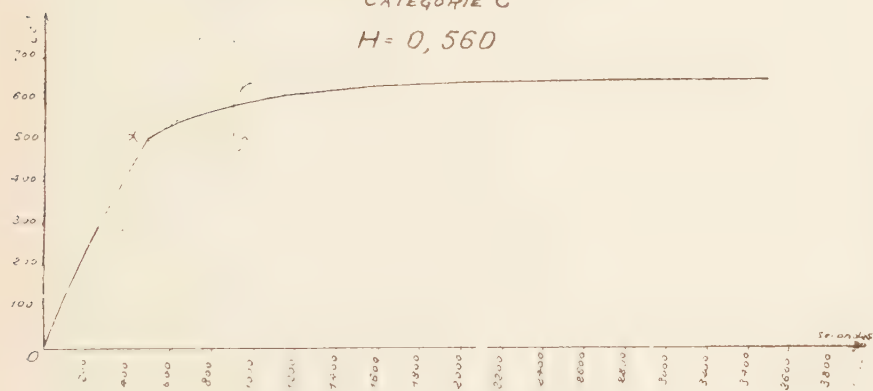


Fig. 16.

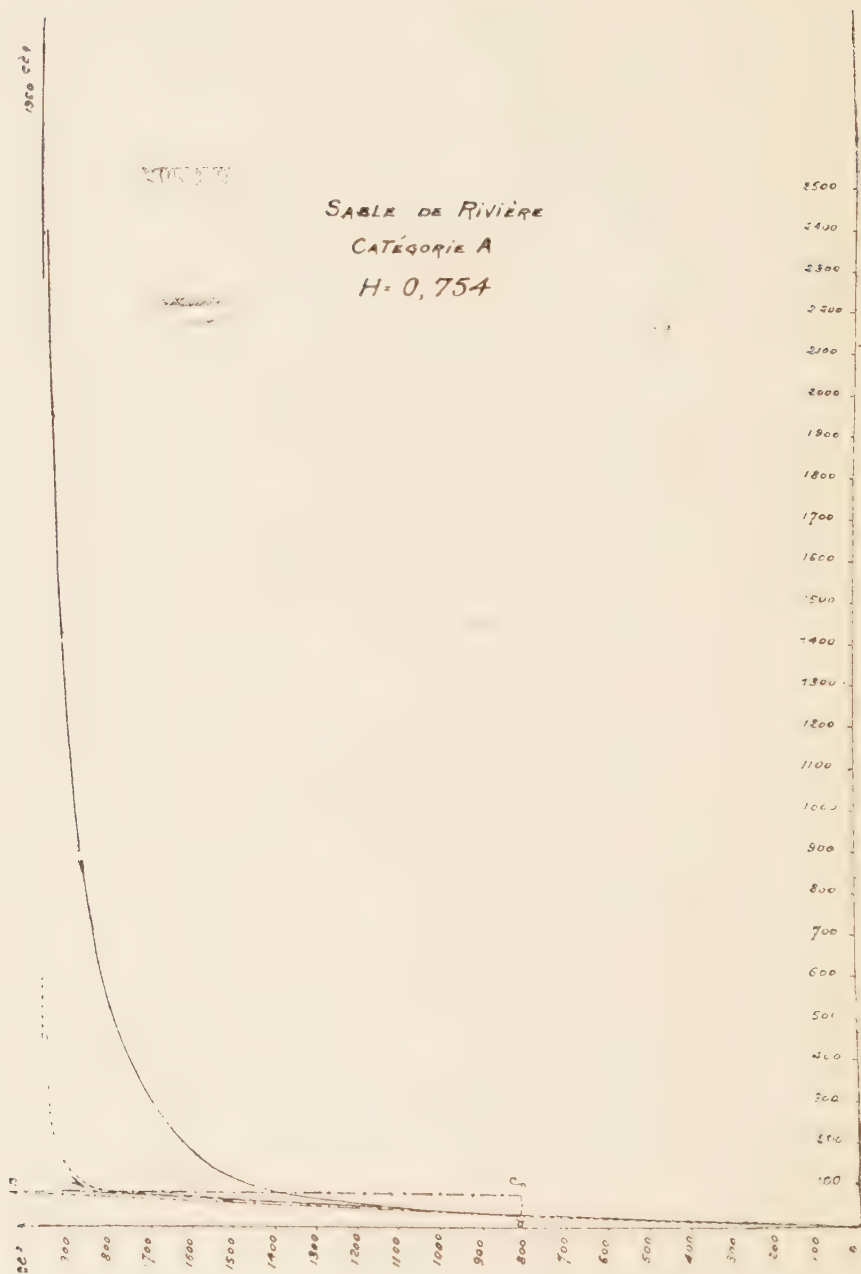




Fig. 18.

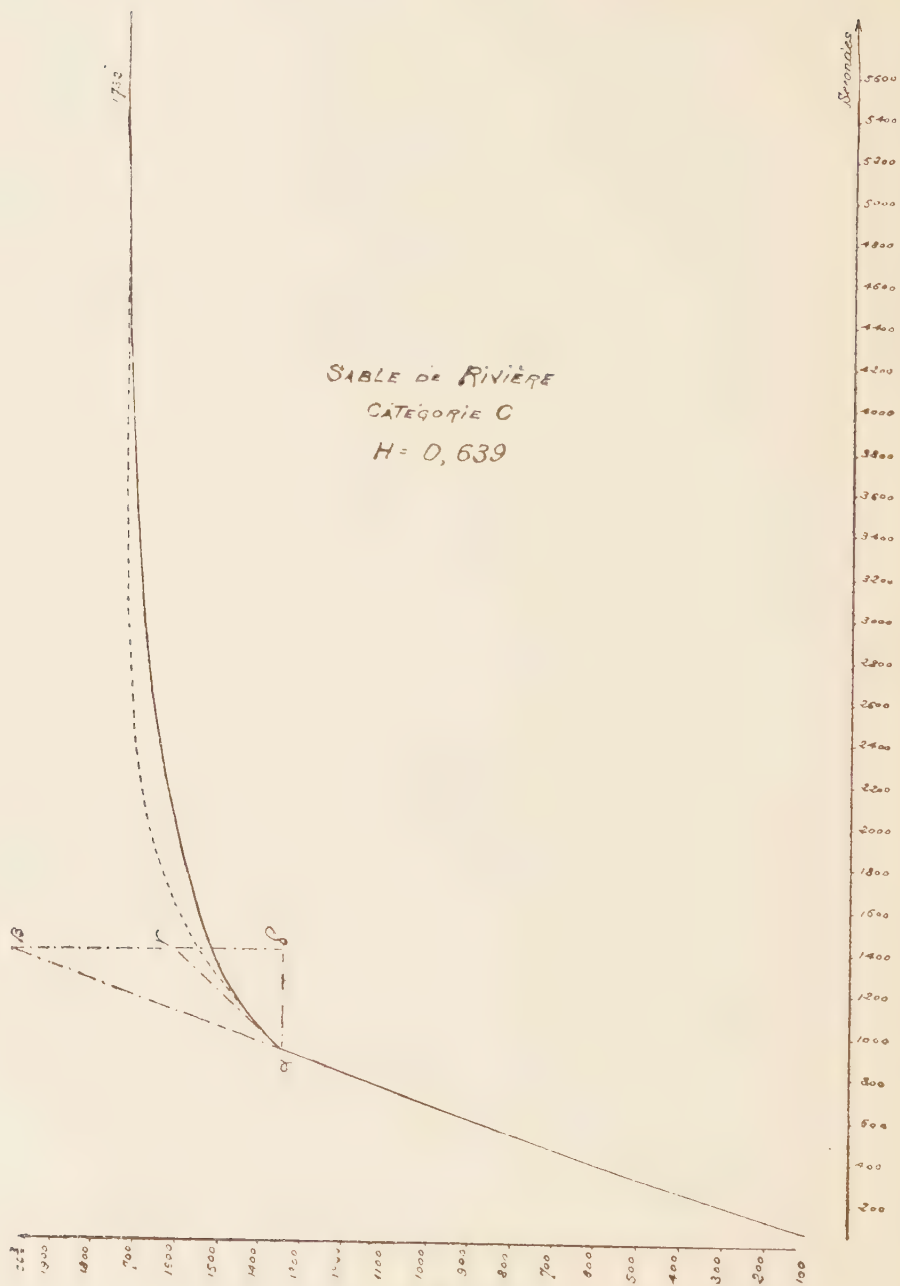


Fig. 19.

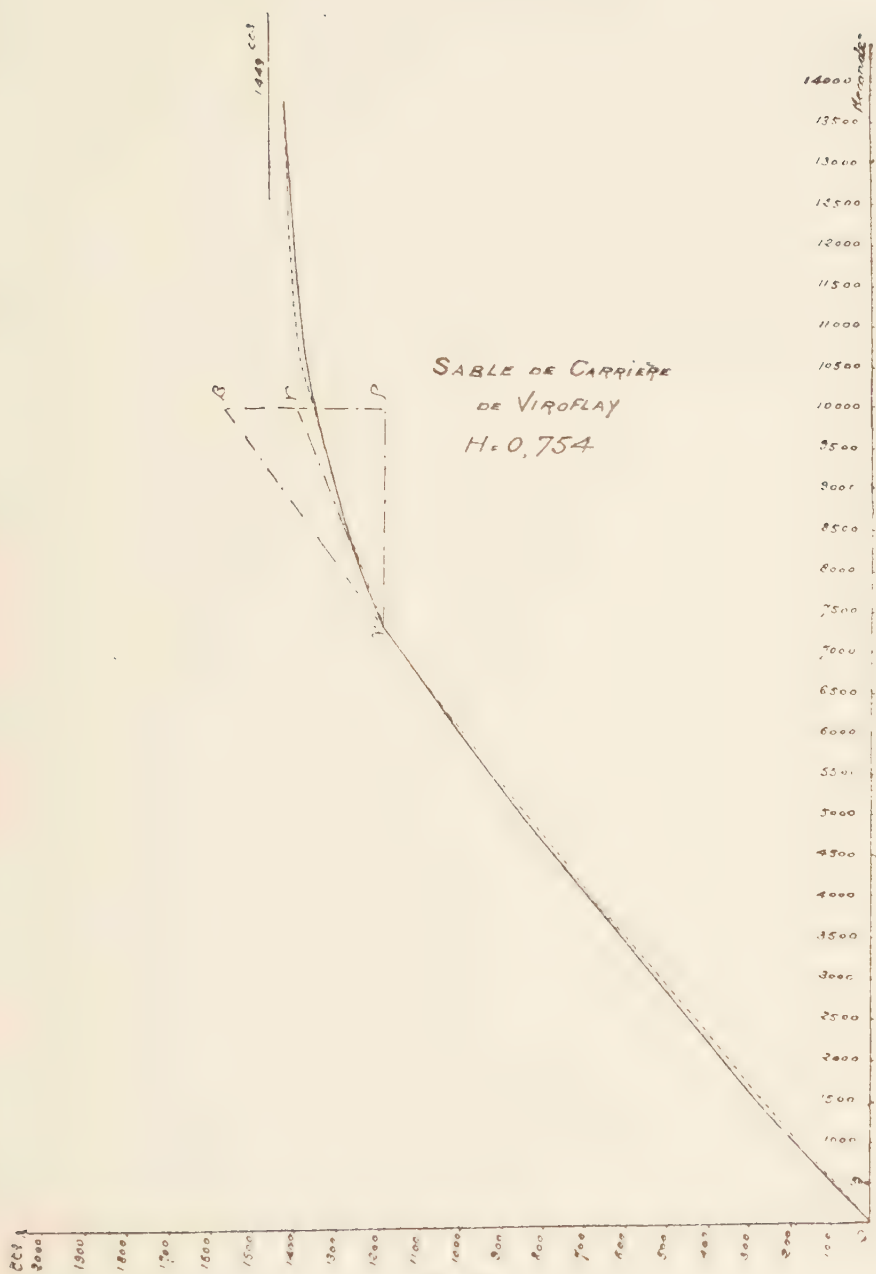


Fig. 20.

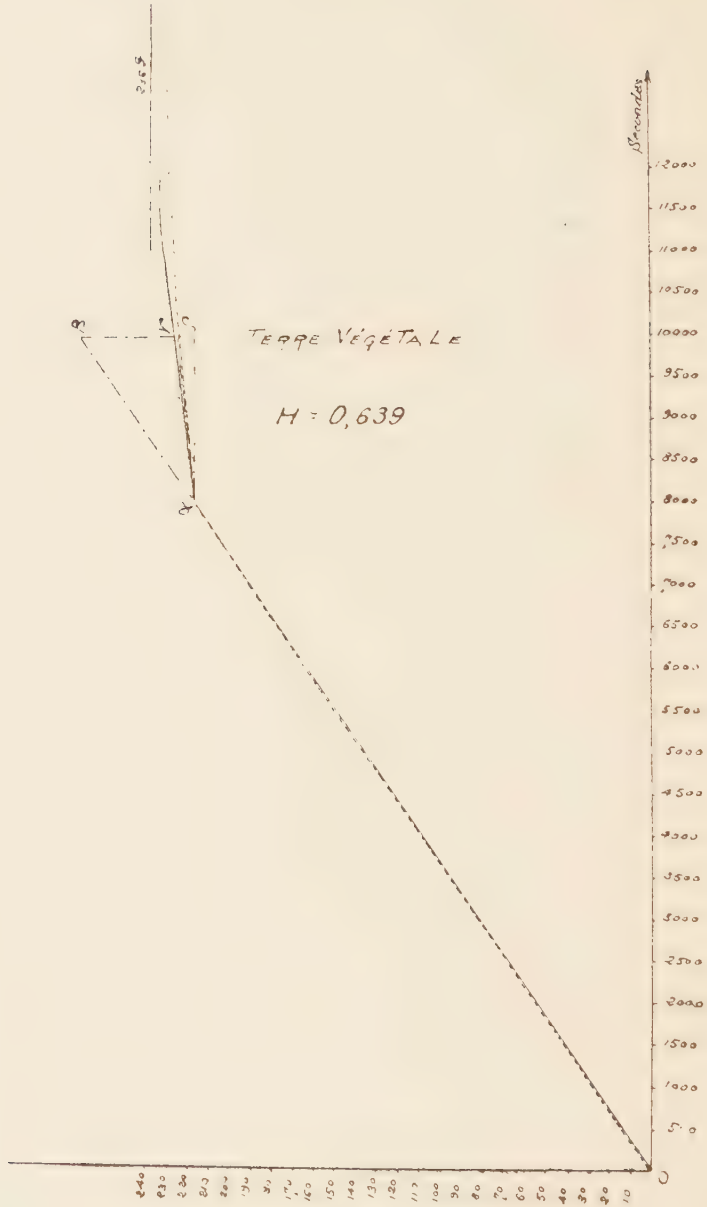


Fig. 21.

En comparant entre eux les résultats obtenus dans ces diverses expériences, nous constatons que :

1° Les trois mesures portant sur le sable de rivière catégorie B donnent :

Graphique n° 13.....	$\gamma_1 = 0,290$
— — 14.....	$\gamma_1 = 0,311$
— — 18.....	$\gamma_1 = 0,270$
Moyenne.....	$\gamma_1 = 0,2903$

Écart maximum : $0,3110 - 0,2903 = 0,0207$, soit 7,1 p. 100 de la valeur moyenne.

2° Les trois mesures portant sur le sable de rivière catégorie C donnent :

Graphique n° 15.....	$\gamma_1 = 0,416$
— — 16.....	$\gamma_1 = 0,375$
— — 19.....	$\gamma_1 = 0,387$
Moyenne.....	$\gamma_1 = 0,3926$

Écart maximum : $0,4160 - 0,3926 = 0,0234$, soit 6 p. 100 de la valeur moyenne.

3° Les mesures portant sur le sable de grève des Sables-d'Olonne donnent :

Graphique n° 11.....	$\gamma_1 = 0,358$
— — 12.....	$\gamma_1 = 0,407$
Moyenne.....	$\gamma_1 = 0,3825$

Écart maximum : $0,3825 - 0,3580 = 0,0245$, soit 6,4 p. 100 de la valeur moyenne.

L'hypothèse émise par M. Boussinesq se trouve donc vérifiée avec une erreur relative de 5 à 6 p. 100. C'est, à notre avis, le maximum d'exactitude que l'on puisse obtenir dans de telles sortes d'expériences.

*
* * *

Nous avons par ailleurs cherché à quelle hauteur l'eau s'élevait par capillarité dans un tube en verre rempli du sable étudié et dont la partie inférieure baignait dans un cristallin-
soir rempli d'eau.

Pour pouvoir observer facilement l'ascension de l'eau, le sable était introduit sec dans le tube. Il était par conséquent assez difficile d'obtenir un tassement identique à celui des expériences précédentes.

Néanmoins, nous avons cherché à nous en rapprocher le plus possible :

1° En tassant énergiquement le sable sec au moment de l'introduction dans le tube.

2° En continuant ce tassement lorsque l'eau montant par capillarité avait mouillé le sable.

Par ailleurs, l'eau ne montait pas exactement à la même hauteur sur toute la périphérie du tube. Nous avons pris, pour formuler nos résultats, la moyenne des hauteurs mesurées en six points de la périphérie du tube (repérés facilement par les six écrous à oreilles) après un temps variant de dix heures à dix jours, suivant la grosseur du sable. .

Remarque. — La hauteur d'ascension capillaire de l'eau dans le sable de Viroflay étant supérieure à la longueur du tube employé pour nos expériences, ce fait nous a permis de constater, lorsque le niveau de l'eau a affleuré la partie supérieure du tube, que la partie centrale du sable était mouillée au même niveau que la partie périphérique et qu'en prenant la moyenne des hauteurs à la périphérie, nous obtenions avec une approximation suffisante le niveau moyen de l'eau.

Pour déterminer la hauteur d'ascension capillaire de l'eau dans ce sable, ce que nous ne pouvions faire directement, en raison de la longueur du tube employé, nous avons employé la méthode indirecte suivante qui utilise les résultats énoncés dans la suite de ce travail et peut leur servir de vérification.

La hauteur d'ascension au bout de six heures était de 0^m,384.

Le mouvement ascendant de l'eau est régi, si les lois proposées sont exactes, par l'équation différentielle :

$$K \frac{\eta - h}{h} s dt = \mu s dh$$

qui donne après intégration :

$$\frac{Kt}{\mu} + C = -h - \eta L (\eta - h).$$

En prenant pour $t = 0$, $h = 0$

$$C = -\eta L \eta$$

Et l'équation devient :

$$\frac{Kt}{\mu} + h = \eta L \left[L \eta - L (\eta - h) \right]$$

En écrivant qu'au temps $t = 6 \times 3\,600 = 21\,600$ secondes, on a $h = 0,384$ et en prenant pour coefficient de perméabilité le coefficient total $\mu = 0,384$ (puisque l'on a utilisé, pour constater l'ascension de l'eau, du sable sec), on obtient pour déterminer η l'équation ci-après (K étant égal à 0,00000338) :

$$\frac{0,00000338 \times 21\,600}{0,384} + 0,384 = \frac{1}{M} \eta [\log \eta - \log (\eta - 0,384)]$$

qui donne, après résolution par approximations successives :

$$\eta = 0,66.$$

Nous avons obtenu les résultats consignés au tableau ci-après, en ce qui concerne les hauteurs d'ascension capillaire de l'eau dans les divers sables.

Nous donnons en regard les valeurs moyennes de

$$\eta = H \times \frac{\beta \gamma}{\beta_0}$$

trouvées précédemment.

Désignation des sables.	Date des expériences.	Hauteurs capillaires.		$\eta = H \times \frac{\beta \gamma}{\beta_0}$
		par expérience.	Moyennes.	
Grève, Les Sables-d'Olonne. .	Août 1921.	0,331	0,331	0,3825
Rivière, catégories A.	— 1922.	0,081	0,081	0,1000
— — B.	— 1921.	0,260	} 0,250	0,2903
— — B.	— 1922.	0,240		
— — C.	— 1921.	0,350	} 0,350	0,3926
— — C.	— 1922.	0,350		
Carrière, Viroflay.	— 1922.	0,660	0,660	0,6330

Il résulte de l'examen de ce tableau que les résultats trouvés d'une part pour les valeurs de γ et d'autre part pour les hauteurs d'ascension capillaire sont très comparables et ne présentent entre eux que des différences admissibles, en raison des difficultés d'expérimentation. D'ailleurs la valeur de γ est presque toujours légèrement supérieure à la hauteur capillaire, ce qui est normal, car, en raison des conditions expérimentales, le tassement du sable est plus fort lors de la détermination de γ , et par suite sa hauteur capillaire plus grande.

Nous croyons donc pouvoir être autorisé à formuler la loi suivante :

« Lorsque le niveau du liquide s'abaisse au-dessous du sommet de la colonne filtrante, la charge se trouve diminuée d'une quantité constante égale à la hauteur à laquelle s'élèverait par capillarité de l'eau placée à la base inférieure de la colonne. »

IV. — Mesure de la fraction de volume d'un terrain perméable occupée par l'eau en mouvement. — Coefficient de perméabilité.

Nous avons fait deux séries d'expériences en vue de déterminer la fraction de volume d'un terrain perméable occupé par l'eau en mouvement.

*
* *

La première avait pour but de déterminer le rapport du volume géométrique des vides du terrain perméable au volume apparent total de ce terrain. Ce rapport, que nous appellerons coefficient de perméabilité totale, et que nous désignerons par μ_1 , était mesuré de la manière suivante :

Un flacon jaugé de volume V_1 était rempli de sable sec jusqu'à son trait de repère. Il était versé de l'eau dans ce flacon jusqu'à ce que le sable soit complètement imprégné d'eau. Soit V_2 le volume de l'eau ainsi versée. Le sable imprégné d'eau s'était tassé et n'occupait plus qu'un volume V_3 . La

différence $V_1 - V_3 = V_4$ de ce volume au volume initial était mesurée par la quantité d'eau qu'il fallait introduire dans le flacon jaugé pour le remplir jusqu'au trait de repère. Le coefficient de perméabilité totale du sable après tassement (le seul intéressant pratiquement) était donc :

$$\frac{V_2}{V_3} = \mu_t.$$

Le tableau ci-après donne les valeurs V_1 , V_2 , V_3 , V_4 et μ_t pour les diverses expériences que nous avons faites.

DATES des expériences.	DÉSIGNATION. des sables.	V_1 .	V_2 .	$V_4 =$ $V_1 - V_3$.	V_3 .	$\mu_t = \frac{V_2}{V_3}$.	
						Par expé- rience.	Moyen- nes.
		c.c.	c.c.	c. .	c.c.		
22 août 1921.	Rivière. cat. A.	250	109	2	248	0,440	0,4210
14 — 1922.	— — A.	500	201	0	500	0,402	
23 — 1921.	— — B.	250	91	2	248	0,367	0,3575
27 juill. 1922.	— — B.	500	155	55	445	0,348	
25 août 1921.	— — C.	250	80	20	230	0,348	0,3385
4 — 1922.	— — C.	500	130	115	395	0,329	
22 — 1922.	Carrière. Viro- flay.	500	165	70	430	0,384	0,3840

*
* *
*

Dans une seconde série d'expériences, nous avons cherché à déterminer quelle était la quantité d'eau contenue dans le sol qui participait au mouvement.

Dans ce but, nous avons imprégné complètement d'eau une colonne de sable de hauteur H et de section s . Nous avons laissé ce sable s'égoutter complètement et nous avons mesuré le volume V de l'eau recueillie.

Lorsque l'écoulement était terminé, la colonne de sable était encore complètement imprégnée d'eau sur une hauteur

η égale à la hauteur capillaire déterminée ci-dessus. L'eau écoulee provenait donc d'un volume de terrain égal à $s(H - \eta)$.

Nous appellerons coefficient de perméabilité du terrain le quotient $\mu = \frac{V}{s(H - \eta)}$ de l'eau recueillie par le volume apparent du terrain ayant laissé écouler cette eau.

Le tableau ci-après résume les expériences faites en suivant le procédé indiqué ci-dessus :

DATES des expériences.	DÉSIGNATION des terrains.	H.	S_c	S_v	$S_c H - S_v \eta$	V.	$\mu = \frac{V}{s(H - \eta)}$	
							Par expé- rience.	Moyen- nes.
22 août 1921.	Sable, rivière A.	mètres 0,405	dm ² . 0,5154	mètre. 0,081	c.c. 1 670	c.c. 385	0,230	0,2275
14 — 1922.	— — A.	0,754	0,7854	0,100	5 137	1 156	0,225	
23 — 1921.	— — B.	0,403	0,5154	0,260	737	210	0,285	0,3045
27 juill. 1922.	— — B.	0,500	0,7854	0,270	1 806	585	0,324	
25 août 1921.	— — C.	0,412	0,5154	0,350	320	64	0,200	0,1990
4 — 1922.	— — C.	0,639	0,7854	0,387	1 979	393	0,198	
22 — 1922.	Sable, carrière, Viroflay.	0,754	0,7854	0,633	950	21	0,022	0,0220
4 — 1922.	Terre végétale I. N. A.	0,639	0,7854	0,290	2 741	270	0,098	0,0980

Nous avons comparé dans le tableau ci-dessous les valeurs trouvées pour μ_t et pour μ dans diverses catégories de sables.

Désignation des sables.	μ_t .	μ .
Sable rivière, catégorie A.....	0,4210	0,2275
— — — B.....	0,3575	0,3045
— — — C.....	0,3385	0,1990
Sable carrière, Viroflay.....	0,3840	0,0220

Il résulte de l'examen de ce tableau que le coefficient μ_t , rapport du volume des vides au volume total du terrain, varie assez peu avec la nature du terrain. Les variations sont sim-

plement dues aux différences de forme des grains de sable et à leur mode d'assemblage différent.

Le coefficient μ , au contraire, varie beaucoup et, en règle générale, diminue lorsque la grosseur des grains de sable diminue. Il en résulte que toute l'eau contenue dans les vides du sable ne participe pas au mouvement, et qu'une partie est retenue à la surface des grains de sable.

La surface totale de ces grains est, le volume apparent du terrain restant le même, d'autant plus grande que les dimensions des grains sont plus petites. Il est donc normal que, plus les grains du terrain sont petits, plus grande soit la quantité d'eau retenue à la surface des grains et, par suite, plus faible soit le coefficient μ .

* * *

Dupuit (1) repousse, en ce qui concerne l'écoulement des eaux dans les canaux, l'hypothèse d'une couche d'eau adhérente à la paroi. Pour repousser cette hypothèse, il fait remarquer que la vitesse V' d'une couche liquide est une vitesse finie qui peut être de plusieurs mètres, tandis que la différence de vitesse $V'' - V'$ de deux couches consécutives est un infiniment petit.

Or, dans le cas qui nous occupe, la vitesse des filets liquides atteint au maximum quelques millimètres à la seconde. L'objection de Dupuit tombe donc dans ce cas. D'ailleurs, après avoir énoncé que l'hypothèse d'une couche adhérente était inadmissible, Dupuit ajoute en remarque « ou du moins, si cette couche existe, elle a nécessairement perdu, par rapport à la couche supérieure, sa puissance de cohésion, et le calcul ne doit pas en tenir compte ».

Nous estimons que, dans le cas de l'écoulement souterrain, l'hypothèse d'une couche adhérente peut seule expliquer la différence de valeur entre μ_1 et μ .

(1) DUPUIT, Étude sur le mouvement des eaux, p. 6.

D'ailleurs, cette hypothèse explique un fait constaté par les agronomes et principalement par Deherain :

Un sol imprégné d'eau contenant un engrais soluble (nitrate, par exemple) conserve encore, après de fortes pluies qui ont délavé le sol, une certaine teneur en nitrate, ce qui tend bien à prouver que toute l'eau contenue dans le sol n'a pas participé au mouvement occasionné par la pluie.

* * *

Nous croyons donc pouvoir conclure en énonçant la loi suivante :

« Lorsqu'une nappe liquide est en mouvement dans un sol homogène, le volume du liquide en mouvement est dans un rapport μ avec le volume apparent du sol mouillé par lui. Ce rapport μ est inférieur au rapport μ_v du volume des vides géométriques du sol au volume apparent du sol. »

V. — Vérification expérimentale d'ensemble des résultats ci-dessus.

Si les lois énoncées ci-dessus sont exactes, l'écoulement de l'eau dans un tube vertical contenant un terrain perméable peut se calculer de la manière suivante :

Soit s la section du tube ;

H la hauteur de la colonne de sable ;

h la charge ;

K le coefficient de filtration ;

μ le coefficient de perméabilité ;

τ la hauteur capillaire.

Prenons l'origine des temps à l'instant où le niveau de l'eau coïncide avec la surface supérieure de la colonne de sable. A cet instant, $h = H$. Les instants négatifs correspondront à la période de l'écoulement où $h > H$, et les instants positifs à la période où $h < H$.

Pour chacune de ces périodes, les lois de l'écoulement sont différentes.

1° $h > H$.

La vitesse apparente est $K \frac{h}{H}$ et le débit $K \frac{h}{H} s$.

La quantité d'eau écoulée dans l'intervalle de temps dt est :

$$\frac{Kh}{H} s dt.$$

Mais, dans cet intervalle de temps dt , la hauteur a varié de $-dh$, et le volume d'eau écoulé est $-s dh$.

En égalant les deux expressions du volume de l'eau, on obtient :

$$\frac{Khdt}{H} = -s dh \quad (1)$$

qui donne par intégration :

$$\frac{Kt}{H} = -Lh + C. \quad (2)$$

Or, pour $t = 0$, $h = H$, et on a $C = LH$.

$$t = -\frac{H}{K} L \frac{h}{H}.$$

Comme, par ailleurs, en appelant h_0 la charge à l'instant $-t_0$ du début de l'expérience, la quantité d'eau écoulée est :

$$e = (h_0 - h) s. \quad (3)$$

Les formules (2) et (3) permettent de calculer en fonction du temps la quantité d'eau écoulée.

2° $h < H$.

La pente motrice est, dans ce cas, $\frac{h - \eta}{h}$.

La vitesse apparente est $K \frac{h - \eta}{h}$.

Le débit est $K \frac{h - \eta}{h} s$, et la quantité d'eau écoulée dans l'intervalle de temps dt est :

$$K \frac{h - \eta}{h} s dt.$$

Pendant ce même intervalle de temps dt , la hauteur h a varié de $-dh$ et la quantité d'eau écoulée est $-\mu s dh$ (et non plus $-s dh$), puisque l'écoulement est souterrain.

En égalant les deux valeurs du volume de l'eau, on obtient :

$$K \frac{h - \eta}{h} dt = -\mu dh \quad (4)$$

qui donne par intégration, en remarquant que, pour $t = 0$ $h = H$.

$$\frac{Kt}{\mu} = H - h + \eta L \frac{H - \eta}{h - \eta} \quad (5)$$

Par ailleurs, le volume de l'eau écoulée depuis l'instant 0 est :

$$e = \mu s (H - h) \quad (6)$$

Les formules (5) et (6) permettent de calculer la quantité d'eau écoulée en fonction du temps.

*
* *

Nous avons fait en 1922 une série d'expériences destinées à vérifier la valeur pratique de ces formules trouvées en appliquant les lois énoncées ci-dessus.

A cet effet, nous avons employé le dispositif de la figure 9 et faisons écouler l'eau dans l'appareil enregistreur qui donnait un graphique sur lequel nous mesurions les quantités K , η et μ , caractéristiques du sol.

1^o *Mesure de γ .* — Nous avons déjà indiqué comment pouvait se mesurer sur le graphique la hauteur capillaire .

$$\gamma = H \times \frac{\beta\gamma}{\beta\delta}.$$

2^o *Mesure de K.* — Au début de l'expérience, $t = -t_0$, $h = h_0$.

En portant ces valeurs dans l'équation (2), on obtient :

$$t_0 = \frac{H}{K} L \frac{h_0}{H}$$

d'où :

$$K = \frac{H}{t_0} L \frac{h_0}{H}.$$

3^o *Mesure de μ .* — La courbe tracée par l'enregistreur devient, au bout d'un temps plus ou moins long, pratiquement parallèle à l'axe des temps. A ce moment, l'écoulement est complètement terminé et la quantité d'eau recueillie depuis l'instant 0 se mesure sur le graphique. Soit E cette quantité. Elle provient d'un volume de sable égal à $s(H - \gamma)$.

On a donc :

$$\mu = \frac{E}{H - \gamma}.$$

Il est donc possible de mesurer sur le graphique les trois constantes caractéristiques du sol.

Par ailleurs, en calculant à l'aide des formules (2), (3), (5) et (6) les quantités d'eau écoulées en fonction du temps, nous obtiendrons une courbe qui, si les lois énoncées se vérifient, doit coïncider avec la courbe tracée par l'enregistreur.

*
—

Nous donnons ci-après le détail du calcul pour le sable de rivière catégorie C (fig. 19).

La transcription du graphique tracé par l'enregistreur donne la courbe en trait plein de la figure.

La correspondance sur ce graphique des temps et des quantités d'eau écoulées est la suivante :

Temps sec.	Volume d'eau. c.c.	Temps sec.	Volume d'eau. c.c.	Temps sec.	Volume d'eau. c.c.
0	0	2 050	1 607	4 101	1 713
228	354	2 278	1 628	4 329	1 716
456	706	2 506	1 648	4 557	1 718
684	1 014	2 734	1 665	4 785	1 725
912	1 339	2 962	1 675	5 012	1 729
1 140	1 442	3 189	1 687	5 240	1 730
1 367	1 505	3 417	1 693	∞	1 732
1 595	1 548	3 645	1 699		
1 823	1 578	3 873	1 708		

Le point α correspond à l'instant initial de la théorie précédente.

Il est caractérisé par : $t = 912$; $e = 0,001339$.

La section du tube étant de 0,007854, la hauteur h_0 de l'eau au début de l'expérience est :

$$0,039 \frac{0,001339}{0,007854} = 0,8095.$$

On a donc :

$$K = \frac{-H}{t_0} L \frac{h_0}{h} = \frac{-0,639}{-912} L \frac{0,8095}{0,639} = 0,00016571.$$

Par ailleurs, le graphique permet de déterminer :

$$\eta = 0,639 \times \frac{40}{66} = 0,387.$$

• Enfin, la quantité d'eau écoulée au bout d'un temps pratiquement infini est de 1 732 centimètres cubes.

L'eau écoulée depuis le point α a donc un volume de :

$$0,001732 - 0,001339 = 0,000393.$$

Elle correspond à un volume apparent de sable calculé comme suit :

Hauteur de la colonne de sable.....	0,639
Hauteur capillaire	<u>0,387</u>
Différence.....	0,252

soit, pour une section de 0,007854, un volume de :

$$0,252 \times 0,007854 = 0,001979.$$

Le coefficient de perméabilité est donc :

$$\mu = \frac{0,000393}{0,001979} = 0,198.$$

Les trois coefficients caractéristiques du sable sont donc déterminés :

$$\begin{aligned} K &= 0,00016571 \\ \eta &= 0,387 \\ \mu &= 0,198. \end{aligned}$$

L'équation finie du mouvement est, pour la première partie de la courbe :

$$t = 912 - \frac{H}{K} L \frac{h}{H}$$

soit, en remplaçant les lettres par leur valeur :

$$t = 912 - 8879 (\log h - \log 0,639).$$

Le tableau ci-après donne le détail des calculs.

Eau écoulée. c.	h.	log h.	log h — log 0,639.	912 — t	—
0	0,80950	1,9082169	0,1027160	912	0
500	0,74583	1,8726398	0,0671389	596	316
1 000	0,68217	1,8338926	0,0283917	252	660
1 339	0,63900	1,8055000	0,0000000	0	912

L'équation finie du mouvement est, pour la deuxième partie de la courbe (origine des temps à 912 secondes et des volumes à 1 339 centimètres cubes) :

$$\frac{K}{L} = \frac{H - h}{h - \eta} \quad \frac{H - \eta}{h - \eta}$$

soit, en remplaçant les lettres par leur valeur :

$$t = 1\,195 [0,1056 - h - 0,8911 \log (h - 0,387)].$$

Le tableau ci-après donne le détail des calculs.

EAU ÉCOULÉE depuis le point		$h.$	$h - 0,387.$	$\log (h - 0,387).$	$\frac{0,8911}{\log (h - 0,387)}.$	$\frac{0,1056}{h - \eta}.$	précédent — $h.$	$t = 912.$	$t.$
$0.$	$\eta.$								
1 339	0	0,63900	0,25200	— 0,5985995	— 0,5334	0,6390	0,0000	0	912
1 350	11	0,63193	0,24493	— 0,6109580	— 0,5444	0,6500	0,0181	22	934
1 400	61	0,59978	0,21278	— 0,6720692	— 0,5989	0,7045	0,1047	125	1 037
1 450	111	0,56762	0,18062	— 0,7432342	— 0,6623	0,7679	0,2003	240	1 152
1 500	161	0,53547	0,14847	— 0,8283613	— 0,7382	0,8438	0,3083	369	1 281
1 550	211	0,50332	0,11632	— 0,9343456	— 0,8326	0,9382	0,4349	519	1 431
1 600	261	0,47117	0,08417	— 1,0748427	— 0,9578	1,0634	0,5918	707	1 619
1 650	311	0,43901	0,05201	— 1,2839131	— 1,1441	1,2497	0,8107	969	1 881
1 700	361	0,40686	0,01986	— 1,7020208	— 1,5167	1,6223	1,2164	1 455	2 367

Les résultats consignés dans les tableaux ci-dessus ont été reproduits en traits pointillés sur le graphique.

* *

Nous avons fait un travail analogue sur les cinq catégories de terrains indiquées ci-après :

Dates des expériences.	Nature des terrains.	Numéro de la figure correspondante.
27 juillet 1922...	Sable rivière, catégorie B.	18
4 août 1922	Terre végétale I. N. A....	21
14 — —	Sable rivière, catégorie C.	19
14 — —	— — — — A.	17
22 — —	— carrière, Viroflay....	20

Il résulte de l'examen des graphiques que, pour les sables fins (sable de Viroflay et sable de rivière catégorie C) et pour

la terre végétale, la coïncidence des traits pleins et pointillés est aussi parfaite que le comporte ce genre d'expériences.

Pour les sables à très gros grains, au contraire (sables de rivière, catégories A et B), le trait pointillé (calculé) s'élève à partir du point α au-dessus du trait plein (tracé par l'enregistreur), et d'autant plus que le sable est à plus gros grains.

Ce fait peut s'expliquer, à notre avis, soit par l'influence des forces vives qu'il n'est peut-être plus possible de négliger lorsque l'on arrive à des vitesses d'écoulement assez grandes, soit par des variations de la valeur de μ lorsque la vitesse d'écoulement est assez grande pour entraîner une partie de l'eau qui adhère à la surface des grains de sable.

C'est une question que nous n'avons pas eu le loisir d'étudier, mais que nous nous réservons de reprendre.

D'ailleurs, les terrains sur lesquels on opère pratiquement sont constitués par des grains de diamètre inférieur à celui des grains de sable de rivière catégorie C, et l'on peut considérer qu'en ce qui les concerne, les lois énoncées ci-dessus s'appliquent rigoureusement, puisqu'il y a coïncidence entre les courbes calculées et les courbes tracées par l'enregistreur.

DEUXIÈME PARTIE

PROCÉDÉS PRATIQUES DE MESURE DES CONSTANTES SPÉCIFIQUES D'UN TERRAIN

Les lois vérifiées ou établies au cours de la précédente partie, permettent de déduire le mouvement de l'eau dans un sol homogène de la connaissance de trois constantes spécifiques relatives à ce sol :

Le coefficient de filtration K ;

La hauteur capillaire γ ;

Le coefficient de perméabilité μ .

Nous nous proposons, dans cette deuxième partie, d'étudier un procédé pratique de mesure de ces coefficients.

Leur mesure directe (particulièrement en ce qui concerne la hauteur capillaire) est, ainsi que nous l'avons vu plus haut, longue et difficile.

Il est possible, ainsi que nous l'avons vu au dernier chapitre de la première partie, de mesurer ces constantes sur le graphique tracé par l'enregistreur. Ce procédé donne déjà des résultats meilleurs et obtenus plus rapidement qu'avec la méthode directe. Mais il nécessite l'emploi d'un appareil enregistreur assez coûteux et pouvant donner de mauvais résultats entre les mains d'un opérateur non expérimenté. En outre la construction des tangentes aux deux branches de la courbe pour la détermination des triangles α , β , γ , δ est une opération graphique qui peut présenter des difficultés pour les personnes non habituées.

Nous avons donc cherché un appareil simple pouvant être utilisé par un opérateur n'ayant pas de connaissances spéciales et donnant les résultats sans constructions graphiques ni calculs compliqués.

Nous croyons que le dispositif décrit ci-après remplit ces conditions.

Un tube cylindrique en cuivre T (fig. 22) de 0^m,10 de diamètre intérieur (section $S = 0,007854$) et de 1 mètre de longueur porte à sa partie supérieure un regard en verre sur lequel sont gravés deux traits, l'un à une distance $H = 0^m,80$ de la base inférieure du tube, l'autre à une distance $h_0 = 0^m,90$ de cette base. La distance de ces repères est donc de $h_0 - H = 0^m,10$ et le volume compris entre eux est : $S(h_0 - H) = 0,0007854$.

Le tube est terminé à sa partie inférieure par un dispositif de tamisage identique à celui employé pour nos expériences.

Par ailleurs, le corps A d'un flacon F a un volume V_1 (limité par un trait t) égal à celui compris entre les deux repères du tube, soit en l'espèce 0^l,7854.

Le trait t est marqué 0.

Le flacon se continue par une partie étranglée sur laquelle est gravé un trait comprenant à partir du trait 0 un volume $V_2 = 50$ centimètres cubes.

La partie du flacon surmontant cette partie étranglée est cylindrique, de 8 centimètres de diamètre environ, et graduée à partir du 0.

Un entonnoir muni d'un robinet R à deux voies permet d'envoyer l'eau s'écoulant du tube, soit à l'extérieur, soit dans le flacon gradué.

Ceci posé, l'expérimentateur remplit le tube T du sol à étudier jusqu'au trait de repère

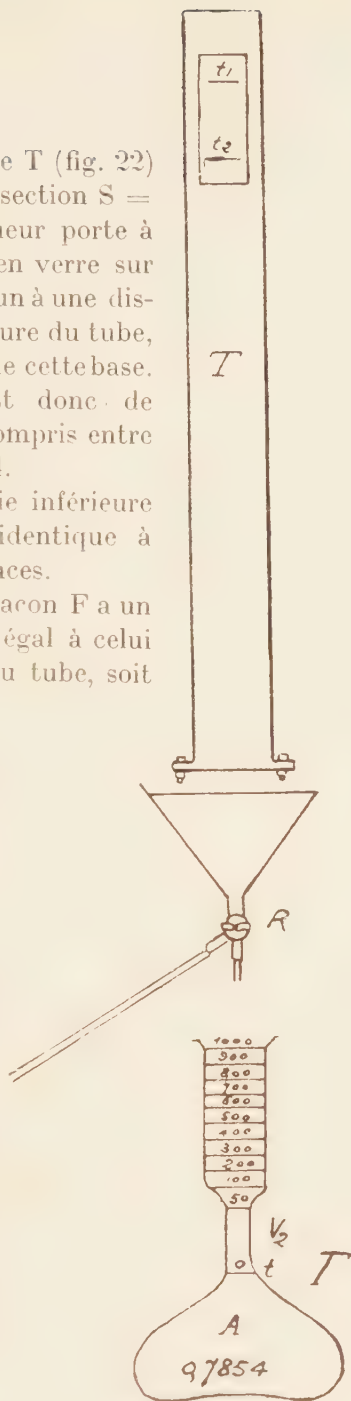


Fig. 22.

t_2 ; il fait circuler dans le tube pendant un certain temps un courant d'eau et, s'il se produit des tassements, il introduit dans le tube de nouvelles quantités de terre jusqu'à ce que, le tassement étant terminé, le niveau supérieur du sol affleure le trait t_2 .

A partir de ce moment, il cesse d'introduire de l'eau dans le tube et, lorsque le niveau de l'eau atteint le trait t_1 , il manœuvre le robinet à deux voies et envoie l'eau dans le flacon F. Il note l'instant θ_0 où il fait cette manœuvre.

Il note également les instants θ_1 et θ_2 où l'eau atteint les traits 0 et 50.

Il note enfin le volume d'eau V (mesure à partir du trait 0) se trouvant dans le vase après écoulement complet.

Nous allons établir qu'à l'aide de ces quatre mesures, il est possible de déterminer les trois constantes caractéristiques.

1° *Calcul de K.* — Au moment où l'eau atteint le trait 0 dans le flacon F, la surface de l'eau contenue dans le tube T est en coïncidence avec la surface du terrain en t_2 , puisque l'eau a été envoyée dans le flacon quand le niveau se trouvait en t_1 et puisque les traits t_2 et t_1 comprennent un volume égal à celui de la partie A.

Or nous avons établi que la loi d'écoulement était, en prenant pour origine des temps l'instant θ_1 où la surface de l'eau et la surface du sable coïncident :

$$t = \frac{H}{K} L \frac{h}{H}.$$

En appliquant cette formule à l'instant θ_0 où la hauteur est h_0 , on obtient :

$$\theta_1 - \theta_0 = \frac{H}{K} L \frac{h_0}{H}$$

$$K = \frac{H L \frac{h_0}{H}}{\theta_1 - \theta_0}$$

Or, $HL \frac{h_0}{H}$ est une constante Λ de l'appareil.

En l'espèce, elle est égale à $0,80 L \frac{0,90}{0,80} = 0,0942$.

On a donc :

$$K = \frac{\Lambda}{\theta_1 - \theta_0} = \frac{0,0942}{\theta_1 - \theta_0}.$$

2° *Calcul de μ et de η .* — A partir du moment où l'eau a atteint le trait 0 dans le flacon F et en prenant cet instant pour origine, l'équation finie du mouvement est, ainsi que nous l'avons vu dans la précédente partie :

$$\frac{Kt}{\mu} = H - h - \eta_1 L \frac{H - \eta_1}{h - \eta_1}. \quad (7)$$

Or, à l'instant $\theta_2 = \theta_1$, le volume de l'eau écoulée est V_2 et la hauteur h a baissé de $\frac{V_2}{s\mu}$.

Elle est donc égale à $H - \frac{V_2}{s\mu}$.

En portant dans l'équation (7) ces valeurs de t et de h , on obtient

$$K \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{\mu} = \frac{V_2}{s\mu} - \eta_1 L - \frac{H - \eta_1}{H - \frac{V_2}{s\mu} - \eta_1}$$

qui donne après simplification :

$$K (\theta_2 - \theta_1) = \frac{V_2}{s\mu} - \mu\eta_1 L \left[1 - \frac{V_2}{\mu s (H - \eta_1)} \right]. \quad (8)$$

Or, le volume d'eau V obtenu après écoulement complet et mesuré à partir du trait 0 est égal à $\mu s (H - \eta_1)$.

La formule (8) devient donc :

$$K (\theta_2 - \theta_1) = \frac{V_2}{s} - \mu\eta_1 L \left[1 - \frac{V_2}{V} \right]$$

Or $L \left[1 - \frac{V_2}{V} \right]$ est une quantité B qui se calcule facilement et pour laquelle on peut d'ailleurs dresser des tables en fonction de V pour un appareil donné.

On a donc pour déterminer μ et η les deux équations :

$$\begin{cases} K (\theta_2 - \theta_1) = \frac{V_2}{s} - \mu \eta B \\ V = (H - \eta) s \end{cases} \quad (9)$$

d'où l'on déduit sans difficulté :

$$\begin{cases} \mu = \frac{s K (\theta_2 - \theta_1) + B V + V_2}{B H s} \\ \eta = H - \frac{V}{s} \end{cases} \quad (10)$$

formules où tous les termes des seconds membres sont connus, soit par construction de l'appareil, soit par les mesures effectuées, soit par les résultats précédents.

TROISIÈME PARTIE

APPLICATION DES RÉSULTATS PRÉCÉDENTS A L'ÉTUDE DU MOUVEMENT DES NAPPES AQUIFÈRES SOUTERRAINES

I. Résumé des chapitres précédents et objet du présent chapitre. — Les expériences décrites au chapitre premier ont confirmé, pour de faibles pentes motrices des nappes filtrantes, l'existence des trois lois ci-après :

1^o Le débit d'un filtre cylindrique par unité de section droite normale à l'écoulement (quantité appelée vitesse apparente et désignée par V) est proportionnel à la charge H et en raison inverse de l'épaisseur de la couche traversée e . On a donc : $V = K \frac{H}{e}$, K étant une constante spécifique pour un sol homogène. Nous l'appelons coefficient de filtration.

2^o Lorsque la surface libre du liquide se trouve à l'intérieur du sol, la capillarité agit en diminuant d'une quantité constante pour un sol homogène la charge en chaque point de la nappe liquide. Nous appelons cette quantité constante hauteur capillaire et nous la désignons par τ . C'est également une constante spécifique.

3^o Lorsqu'une nappe liquide est en mouvement dans un sol homogène, le volume du liquide en mouvement est dans un rapport μ avec le volume apparent du sol mouillé par lui. Ce rapport μ est aussi une constante spécifique que nous appelons coefficient de perméabilité.

Les méthodes et appareils décrits au chapitre II permettent de mesurer pour un sol donné et dans des conditions de compression déterminées les constantes spécifiques K , τ , μ .

Nous nous proposons dans le présent chapitre d'utiliser cette connaissance aussi précise que possible des coefficients

K , η et μ pour étudier la forme et le débit des nappes souterraines coulant dans le sol.

Dans de remarquables ouvrages, M.M. Boussinesq, Pochet, Limasset et Maillet ont étudié le problème dans sa généralité et se sont appliqués à analyser les phénomènes complexes qui se produisent dans le mouvement de nappes à gros débit et de grande étendue.

Ces études nous ont été d'une très grande utilité et nous ont guidé dans nos recherches, quoique notre but soit beaucoup plus modeste. Nous nous attacherons principalement à rechercher la forme et le débit des nappes de peu d'importance et de faible étendue que l'on a à examiner lors des études de drainage, d'assainissement ou d'irrigation.

Pour l'étude de ces nappes, il est permis de faire des hypothèses qui simplifient les calculs. C'est ainsi que l'on peut considérer, étant donnée leur faible étendue, le sol qu'elles traversent, comme homogène. Les coefficients spécifiques K , η et μ peuvent donc être pris constants dans toute l'étendue de la nappe. Le débit, étant très faible, peut s'évanouir par rapport à d'autres quantités dans certaines expressions.

Par contre, certaines hypothèses faites dans l'étude des nappes de grande étendue ne sont plus permises. C'est ainsi qu'il n'est plus possible de considérer comme nulle l'épaisseur de la nappe par rapport à sa longueur. De même, il ne sera plus possible de considérer toujours comme étant parallèles les filets liquides.

Le problème qui se pose est donc différent de celui que l'on a à examiner lors de l'étude de grandes nappes.

Alors que, dans ce dernier cas, il y a surtout lieu d'étudier le sens de variation des phénomènes et leur ordre de grandeur, nous avons, pour l'étude de petites nappes, non pas à rechercher le sens de variation qui est en général évident *a priori*, mais à exprimer d'une manière numérique aussi exacte que possible les résultats qui doivent être utilisés directement par l'ingénieur.

C'est pourquoi, dans cette étude, nous conduirons les calculs

d'une manière différente de celle utilisée dans les ouvrages cités ci-dessus. Nous nous placerons dans des cas particuliers, que nous définirons avec précision, et nous utiliserons aussi longtemps que possible des formules mathématiquement exactes pour ne recourir aux formules approchées que lorsque nous pourrons établir l'ordre de grandeur de l'erreur que nous commettons en faisant l'approximation.

*
* *

II. Étude générale d'une nappe cylindrique à débit constant et à régime uniforme coulant dans un sol homogène sur un fond imperméable. — Nous appellerons nappe cylindrique, une nappe dans laquelle les filets liquides

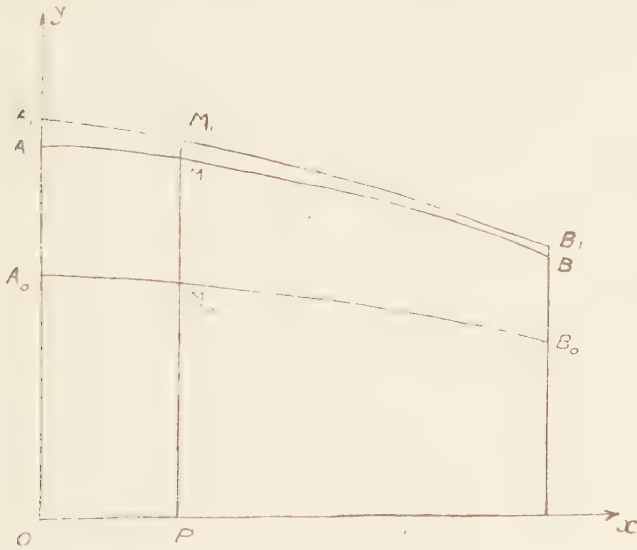


Fig. 23.

coulent par tranches verticales parallèles et identiques.

Le fond imperméable sera lui-même un cylindre à génératrices horizontales.

Nos calculs porteront toujours sur une tranche de 1 mètre de largeur de cette nappe.

Prenons pour plan de la figure 23 un plan perpendiculaire aux génératrices du fond imperméable. Dans ce plan, prenons pour axe des x un axe horizontal, et pour axe des y une verticale ascendante.

Soit $A_0M_0B_0$ la trace du fond imperméable sur le plan de la figure, AMB la trace de la surface libre de la nappe sur le même plan.

Soient x et y les coordonnées du point M .

La nappe ayant un débit constant et un régime uniforme, la courbe AMB ne variera pas avec le temps et y sera fonction exclusivement de x et du débit q de la nappe.

Nous pouvons donc poser $y = f(x, q)$.

Supposons x constant et donnons à y un accroissement infiniment petit dy .

Nous allons calculer l'accroissement de débit dq correspondant au débit du filet liquide $AMBA_1M_1B_1$.

Désignons par i l'angle de la tangente en M à la courbe AMB avec l'horizontale.

La section du filet liquide est $dy \cos i$.

La vitesse apparente est, d'après la première loi rappelée au début de ce chapitre :

$$V = K \frac{H}{e}.$$

Or, $\frac{H}{e}$, rapport de la hauteur de chute de l'eau à la longueur de la couche de sable parcourue, n'est autre que $— \sin i$.

Le débit dq du filet liquide est donc :

$$dq = — K dy \sin i \cos i \quad (11)$$

Nous ne pouvons introduire ici la simplification de Dupuit, qui consiste à supposer $\sin i$ très petit, et par suite à poser $\cos i = 1$ et $\sin i = \operatorname{tg} i$, car dans le cas de nappes de faible étendue, $\operatorname{tg} i$ a en moyenne des valeurs assez grandes (plusieurs centièmes) et peut même devenir infinie au seuil de la source.

Nous adopterons donc la formule *exacte* (11) pour le calcul de la surface libre de la nappe.

Nous avons :

$$\operatorname{tg} i = \frac{\partial y}{\partial x}$$

donc :

$$\sin i \cos i = \frac{\frac{\partial y}{\partial x}}{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$$

et l'équation (11) devient :

$$dq = -K dy \frac{\frac{\partial y}{\partial x}}{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$$

L'équation aux dérivées partielles de la surface libre de la nappe est donc :

$$\frac{-K \frac{\partial y}{\partial q} \frac{\partial y}{\partial x}}{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = 1 \quad (12)$$

Supposons cette équation résolue; nous obtiendrons une relation $y = F(x, q)$.

En faisant $q = 0$, nous obtiendrons l'équation du fond imperméable.

En donnant à q une valeur Q égale à celle du débit de la nappe, nous obtiendrons l'équation de la surface libre de la nappe.

En donnant à q des valeurs intermédiaires entre 0 et Q , nous obtiendrons l'équation des filets liquides.

L'intégrale complète de l'équation (12) est :

$$y = \frac{1 + a^2}{-Ka} q + ax + b \quad (13)$$

a et b étant des constantes arbitraires.

Pour obtenir l'intégrale générale, considérons a et b comme des fonctions de q et de x et posons $b = \varphi(a)$, φ étant une fonction arbitraire.

L'équation (13) devient :

$$y = \frac{1 + a^2}{Ka} q + ax + \varphi(a) \quad (14)$$

Dérivons par rapport à a :

$$0 = \frac{1 - a^2}{Ka^2} q + x + \varphi'(a) \quad (15)$$

L'élimination de a entre (14) et (15) donnera une valeur de y qui sera la solution générale de l'équation (12).

La fonction arbitraire $\varphi(a)$ devra être choisie de manière à ce que l'intégrale générale $y = F(x, q)$ devienne pour $q = 0$ $y = F(x, 0)$, équation du fond imperméable.

*
* *

Influence de la capillarité. — D'après la deuxième loi rappelée au début de ce chapitre, la capillarité agit en diminuant d'une quantité τ constante pour un sol homogène la charge en chaque point de la nappe liquide.

La charge n'intervenant, dans l'équation indéfinie (12), que par ses dérivées par rapport à x et à q , la capillarité ne modifie pas cette équation.

Lorsque l'on passe de la forme indéfinie à la forme finie, la charge n'est plus y , mais $y - \tau$, et l'effet de la capillarité se borne simplement à exhausser toute la nappe d'une hauteur τ par rapport au fond imperméable.

En vue de simplifier les calculs qui suivent, nous ne tiendrons pas compte de cette influence de la capillarité. Il y aura simplement lieu, lors des applications, d'exhausser la nappe souterraine de la hauteur capillaire τ , constante spécifique du sol homogène dans lequel elle circule.

*
* * *

III. **Étude de cas particuliers.** — a. *Le fond est horizontal.* Reprenons les équations (14) et (15) et posons :

$$\varphi(a) = ma$$

par suite :

$$\varphi'(a) = m$$

Ces équations deviennent :

$$y = \frac{1+a^2}{-K a} q + ax + ma \quad (16)$$

$$0 = \frac{1-a^2}{K a^2} q + x + m. \quad (17)$$

L'élimination de a entre (16) et (17) donne :

$$y = \pm 1 \frac{2}{K} \sqrt{-q[K(x+m)-q]} \quad (18)$$

Le signe $+$ seul est pratiquement acceptable.

Pour $q = 0$ on a : $\hat{y} = 0$.

Le fond imperméable se confond avec l'axe des x , et la détermination $\varphi(a) = ma$ correspond au cas d'un fond imperméable horizontal.

Supposons $m = 0$, ce qui, dans le cas du débit constant et du régime uniforme, revient à déplacer l'origine d'une quantité m en suivant l'axe des x .

L'équation (18) devient :

$$y = \frac{2}{K} \sqrt{-q(Kx-q)}. \quad (19)$$

La surface libre est une parabole ayant pour axe l'axe des x . Les filets liquides sont également des paraboles ayant pour axe l'axe des x .

Le tableau ci-dessous et la figure 24 donnent les résultats

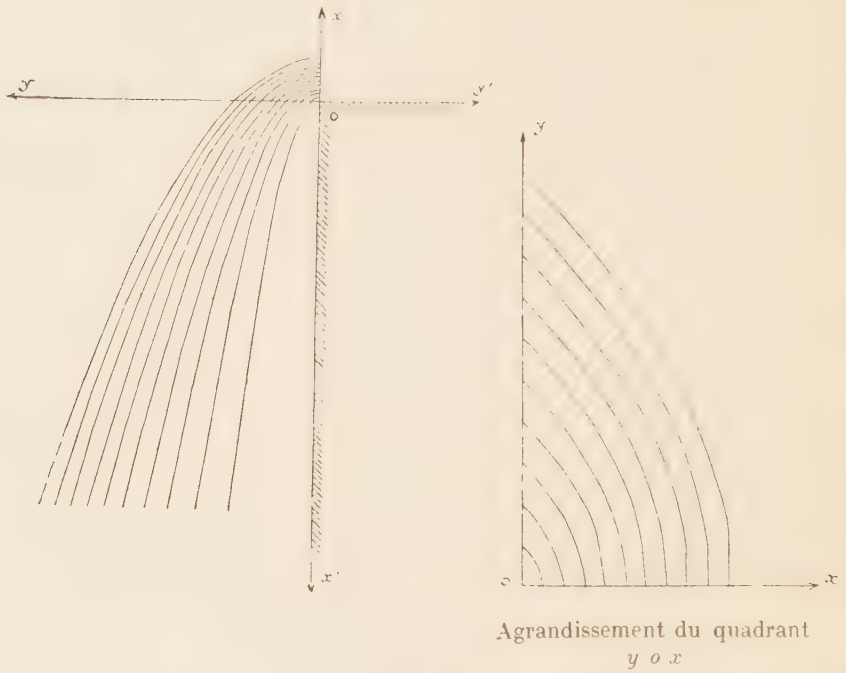


Fig. 24.

d'application de cette formule avec les données suivantes :

$$K = 0,0001$$

$$q = 0,0001$$

Les y_{10} correspondent à $q = 0,0001$ et représentent la surface libre de la nappe.

Les $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9$ correspondent à :

$$q = 0,00001$$

$$q = 0,00002$$

$$q = 0,00003$$

$$\dots\dots\dots q = 0,00009$$

et divisent la nappe en dix filets de débit égal.

$x.$	$y_{10}.$	$y_9.$	$y_8.$	$y_7.$	$y_6.$	$y_5.$	$y_4.$	$y_3.$	$y_2.$	$y_1.$
1,0	0,00	"	"	"	"	"	"	"	"	"
0,9	0,63	0,00	"	"	"	"	"	"	"	"
0,8	0,89	0,60	0,00	"	"	"	"	"	"	"
0,7	1,10	0,85	0,57	0,00	"	"	"	"	"	"
0,6	1,26	1,04	0,80	0,53	0,00	"	"	"	"	"
0,5	1,41	1,20	0,98	0,75	0,45	0,00	"	"	"	"
0,4	1,55	1,34	1,13	0,92	0,71	0,45	0,00	"	"	"
0,3	1,67	1,47	1,26	1,06	0,85	0,63	0,40	0,00	"	"
0,2	1,79	1,59	1,38	1,18	0,98	0,78	0,57	0,35	0,00	"
0,1	1,90	1,70	1,50	1,29	1,10	0,89	0,69	0,49	0,28	0,00
0	2,00	1,80	1,60	1,40	1,20	1,00	0,80	0,60	0,40	0,20
— 1	2,83	2,62	2,40	2,18	1,96	1,73	1,50	1,25	0,98	0,66
— 2	3,46	3,23	3,00	2,75	2,50	2,24	1,96	1,66	1,33	0,92
— 3	4,00	3,75	3,49	3,22	2,94	2,65	2,34	1,99	1,60	1,11
— 4	4,47	4,20	3,92	3,64	3,33	3,01	2,66	2,27	1,83	1,28
— 5	4,90	4,61	4,31	4,00	3,67	3,33	2,95	2,52	2,04	1,43
— 6	5,29	4,99	4,66	4,34	3,99	3,61	3,20	2,75	2,23	1,56
— 7	5,66	5,34	5,00	4,64	4,27	3,88	3,44	2,96	2,31	1,68
— 8	6,00	5,67	5,32	4,94	4,55	4,12	3,67	3,16	2,56	1,80
— 9	6,32	5,98	5,60	5,21	4,90	4,37	3,88	3,34	2,69	1,91
— 10	6,63	6,27	5,89	5,48	5,05	4,60	4,09	3,51	2,85	2,01

Remarque. — La formule (19) trouvée ci-dessus s'écrit, en l'élevant au carré :

$$y^2 = \frac{-\frac{1}{2}q}{K^2}(Kx - q).$$

En adoptant nos notations, les résultats ci-après ont été obtenus pour les nappes souterraines à fond imperméable horizontal, par les divers auteurs ayant étudié la question :

Dupuit (1) propose la formule :

$$y^2 = b^2 - \frac{2q'}{K}$$

b étant la hauteur de la nappe à l'origine.

On peut, par un déplacement convenable de l'origine, supposer b nul, et la formule de Dupuit est :

(1) POCHET, Étude sur les sources, p. 17, équation 8.

$$y^2 = -\frac{2}{K} qx.$$

C'est à cette formule qu'arrive également M. Boulanger (1).

M. Limasset (2), dans sa théorie exacte, arrive à la formule

$$y^2 = -q \frac{(Kx - q)}{K^2}.$$

et, dans sa théorie simplifiée, à la formule

$$y^2 = \frac{2}{K} qx.$$

Cette dernière formule, à l'orientation de l'axe des y près, est la même que celle de Dupuit et de M. Boulanger.

On voit apparaître, dans la formule exacte de M. Limasset et dans celle que nous proposons, un deuxième terme provenant de ce que, dans les théories correspondantes, i n'a pas été considéré comme très petit.

Nous allons établir que les formules trouvées par la théorie de M. Limasset et par celle que nous proposons sont concordantes.

Reprenons en effet la théorie de M. Limasset (Pochet, p. 334) et écrivons la fonction U [équation (11)].

$$U = mf(\alpha) + m\varphi(\beta) \quad \text{au lieu de} \quad U = f(\alpha) + \varphi(\beta).$$

Les filets ont toujours pour équation (équation 15) :

$$f(\alpha) - \varphi(\beta) = iF$$

et la surface libre a pour équation :

$$\frac{y}{\mu} + mf(\alpha) + m\varphi(\beta) = 0.$$

Dans le cas de la nappe coulant sur fond horizontal, on a :
Surface libre de la nappe :

$$\frac{y}{\mu} + mf(\alpha) + mf(\beta) + K = 0.$$

(1) *Hydraulique générale*, t. I, p. 229.

(2) *POCHET, Étude sur les sources*, p. 36 et 331.

Filet liquide :

$$f(\alpha) - f(\beta) = i F$$

et l'équation (21) devient :

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{m f'(\alpha) - m f'(\beta)}{m i [f'(\alpha) - f'(\beta)]} = - \frac{f'(\alpha) - f'(\beta)}{i [f'(\alpha) + f'(\beta)]}$$

ou, après réduction :

$$\frac{1}{f'(\alpha)} - \frac{1}{f'(\beta)} = - 4 m \mu.$$

L'équation (24) devient :

$$U = - \sqrt{\frac{Q}{m \mu} (\sqrt{x^2 + y^2} - x)}$$

équation qui satisfait bien à :

$$\left(\frac{d^2 U}{dx^2} \right) + \left(\frac{d^2 U}{dy^2} \right) = 0.$$

L'équation de la surface libre est donc :

$$y = \sqrt{m \mu Q} \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x}$$

qui donne, après deux élévations au carré, la droite $y^2 = 0$ et la parabole :

$$y^2 = - 2 m \mu Q \left(x - \frac{m \mu Q}{2} \right)$$

Dans le cas de $m = 2$, on obtient :

$$y^2 = - 4 \mu Q (x - \mu Q)$$

soit, avec nos notations :

$$y^2 = - \frac{4 q}{K^2} (K r - q).$$

C'est précisément la formule que nous proposons.

La méthode étudiée par M. Limasset envisage le problème dans toute sa généralité au point de vue analytique, mais donne de multiples solutions parmi lesquelles il faut choisir la solution convenable.

Nous pouvons donc admettre que la théorie exacte de M. Limasset et celle que nous proposons conduisent au même résultat.

Les autres méthodes et la théorie simplifiée de M. Limasset conduisent à :

$$y' = \frac{-2qx}{K}.$$

Si nous négligeons le deuxième terme de notre formule, nous obtenons :

$$y^2 = \frac{-4qx'}{K}.$$

C'est le même résultat, à cela près que la valeur de y^2 se trouve doublée.

Or, dans toutes les théories amenant à $y^2 = \frac{-2qx}{K}$, il est fait implicitement ou explicitement la seconde simplification de Dupuit consistant à admettre que la pression se transmet suivant la loi hydrostatique tout le long d'une même verticale.

M. Boulanger admet en effet (1) que $I = \frac{-dH}{dn}$, c'est-à-dire que lorsque l'on passe d'une verticale à la verticale infiniment voisine, la variation de pression a été, pour tous les points de la verticale, $-dH$, c'est-à-dire la variation du point le plus élevé de la verticale.

M. Limasset fait implicitement dans sa théorie simplifiée la même hypothèse, ainsi que l'a établi M. Pochet dans l'examen de cette théorie (2).

Ces hypothèses reviennent à admettre que la totalité de

(1) BOULANGER, Hydraulique générale, t. I, p. 227.

(2) POCHET, Étude sur les sources, p. 36.

l'eau contenue dans une tranche liquide BMA passant à la position voisine, $B_1M_1A_1$ tombe d'une hauteur $\frac{A_2A_1}{2}$ (fig. 25), c'est-à dire que le travail moteur est égal au poids de la tranche élémentaire multiplié par la différence de niveau de

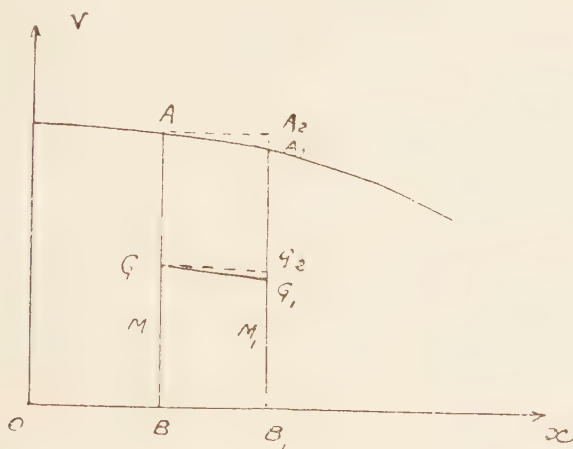


Fig. 25.

la surface libre, alors qu'en réalité le travail moteur est égal au poids de la tranche multiplié par la hauteur G_2G_1 dont tombe le centre de gravité, c'est-à-dire $\frac{A_2A_1}{2}$.

Ces hypothèses ont donc pour effet, dans le cas d'un fond imperméable horizontal, de doubler l'expression du travail moteur et, par suite, la valeur du coefficient de friction K .

L'expression trouvée avec ces hypothèses étant $y^2 = \frac{-2qx}{K}$, l'expression exacte doit donc être prise égale, à notre avis, à $y_2 = \frac{-2qx}{K} = \frac{-4qx}{K}$. C'est la formule à laquelle nous a

amenés la théorie que nous proposons.

Les hypothèses couramment admises jusqu'à ce jour amenaient donc à des résultats qui auraient été exacts avec un sol dont le coefficient de filtration aurait été double de celui du sol étudié. Les résultats n'étaient donc pas faussés dans leur forme ; la valeur des coefficients seule était altérée. Comme ces coefficients n'avaient jamais été mesurés avec une grande précision, et comme les auteurs se sont surtout attachés à étudier un sens général de variation des phénomènes, cette erreur n'avait pas grande importance.

Il ne nous est pas permis, dans la présente étude, de négliger cette cause d'erreur, car notre but, ainsi que nous l'avons exposé au début de ce chapitre, est d'obtenir des résultats numériques les plus précis possible en vue d'une utilisation directe par l'ingénieur.

b. *Le fond est parabolique.* — Revenons aux équations générales (14) et (15) et posons :

$$\varphi(a) = \frac{m}{a}.$$

On aura :

$$\varphi^2(a) = \frac{m}{a^2}.$$

Ces équations deviendront :

$$y = \frac{1 + a^2}{Ka} q + ax - \frac{m}{a} \quad (20)$$

$$0 = \frac{1 - a^2}{Ka^2} q + x + \frac{m}{a^2}. \quad (21)$$

L'équation (21) donne :

$$a = \pm \sqrt{\frac{q + Km}{q - Kx}}$$

Portant cette valeur de a dans (20), il vient :

$$y = \frac{1 + \frac{q + Km}{q - Kx}}{\pm K \sqrt{\frac{q + Km}{q - Kx}}} q \mp x \sqrt{\frac{q + Km}{q - Kx}} \pm m \sqrt{\frac{1 - Kx}{q + Km}}$$

qui devient, toutes réductions faites :

$$y = \frac{2}{K} \sqrt{(q - Kx)(q + Km)} \quad (22)$$

le signe + étant le seul pratiquement acceptable.

Faisons $q = 0$.

On a : $y = 2 \sqrt{-mx}$.

C'est l'équation d'une parabole dont l'axe est l'axe des x .

La détermination $\varphi(a) = \frac{-m}{a}$ correspond donc au cas d'un fond imperméable parabolique.

La surface libre, ainsi que les filets liquides, sont des paraboles à axe horizontal.

Le tableau ci-après et la figure 26 donnent les résultats

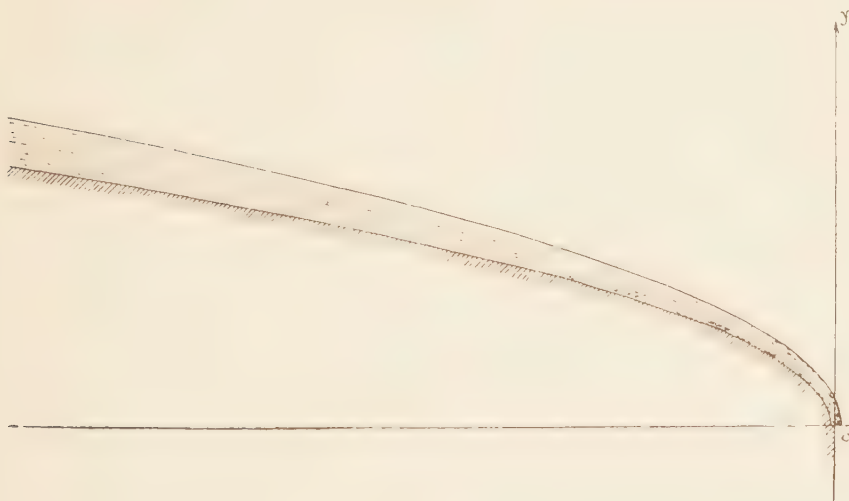


Fig. 26.

d'application de cette formule avec les données suivantes :

$$\begin{aligned} m &= 0,25 ; \\ K &= 0,0001 ; \\ q &= 0,00001. \end{aligned}$$

Les y_{10} correspondent à $q = 0,00001$ et représentent la surface libre de la nappe.

Les $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9$ correspondent à .

$$q = 0,000001$$

$$q = 0,000002$$

$$\dots\dots\dots$$

$$q = 0,000009$$

et divisent la nappe en dix filets de débit égal.

Les y_0 correspondent à la surface du fond imperméable.

x	y	y_9	y_8	y_7	y_6	y_5	y_4	y_3	y_2	y_1	y_0
0,10	00,0	"									
0,09	"	0,00	"								
0,08	"	"	0,00	"							
0,07	"	"	"	0,00							
0,06	"	"	"	"	0,00						
0,05	"	"	"	"	"	0,00					
0,04	"	"	"	"	"	"	0,00				
0,03	"	"	"	"	"	"	"	0,00			
0,02	"	"	"	"	"	"	"	"	0,00		
0,01	"	"	"	"	"	"	"	"	"	0,00	"
0,00	0,37	0,35	0,33	0,30	0,27	0,24	0,21	0,18	0,15	0,10	0,00
— 1	1,24	1,22	1,19	1,17	1,14	1,12	1,10	1,07	1,05	1,03	1,00
— 2	1,71	1,68	1,66	1,63	1,60	1,57	1,54	1,51	1,48	1,45	1,41
— 3	2,09	2,05	2,02	1,98	1,95	1,92	1,88	1,84	1,81	1,77	1,73
— 4	2,40	2,36	2,32	2,28	2,25	2,21	2,16	2,12	2,08	2,04	2,00
— 5	2,67	2,63	2,59	2,55	2,50	2,46	2,42	2,37	2,33	2,29	2,24
— 6	2,92	2,88	2,83	2,79	2,74	2,78	2,65	2,60	2,55	2,50	2,45
— 7	3,15	3,09	3,04	2,99	2,94	2,89	2,84	2,79	2,74	2,69	2,64
— 8	3,37	3,32	3,27	3,22	3,17	3,12	3,06	3,00	2,94	2,88	2,82
— 9	3,57	3,52	3,47	3,42	3,36	3,30	3,24	3,18	3,12	3,06	3,00
— 10	3,75	3,70	3,65	3,59	3,53	3,47	3,41	3,35	3,29	3,23	3,16

c. Le fond est logarithmique. — Reprenons les équations générales (14) et (15) et posons $\varphi(a) = mL$ (— a).

on aura $\varphi'(a) = \frac{m}{a}$.

Ces équations deviendront :

$$y = \frac{1+a^2}{Ka} q + ax + mL (-a) \quad (23)$$

$$O = \frac{1-a^2}{Ka^2} q + x + \frac{m}{a} \quad (24)$$

L'équation (24) donne

$$O = \frac{(1-a^2) q + Ka^2 x + Kma}{a} \\ a = \frac{-Km - \sqrt{K^2 m^2 - 4(Kx-q)q}}{2(Kx-q)}$$

en prenant le signe — qui est pratiquement le seul convenable. Portant cette valeur de a dans l'équation (23), il vient :

$$y = \frac{2(Kx-q)^2 + K^2 m^2 - 2(Kx-q)q + Km \sqrt{K^2 m^2 - 4(Kx-q)q}}{K(Kx-q)[Km + \sqrt{K^2 m^2 - 4(Kx-q)q}]} q \\ - x \frac{Km + \sqrt{K^2 m^2 - 4(Kx-q)q}}{2(Kx-q)} + mL \frac{Km + \sqrt{K^2 m^2 - 4(Kx-q)q}}{2(Kx-q)} \quad (25)$$

Pour $q = 0$, cette expression de y devient :

$$y = -m + mL \frac{m}{x} \quad (26)$$

et cette équation (26) est celle du fond imperméable, qui est une logarithmique.

On a :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-m}{x} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{m}{x^2}$$

Le fond imperméable est donc concave vers le haut si m est positif, et concave vers le bas si m est négatif.

Nous attribuerons à m des valeurs positives dans le but d'étudier les nappes coulant sur fond imperméable concave vers le haut.

L'équation (25) se prête assez difficilement, en raison de son développement, aux applications numériques.

Nous pouvons y apporter des simplifications dans le cas de très petits débits (inférieurs à 10^{-6} mètres cubes par

exemple) et de valeurs de x supérieures à 1 mètre. En effet, K est pratiquement supérieur à 10^{-4} , donc Kx est supérieur à 10^{-4} , et q , qui est inférieur à 10^{-6} peut être négligé par rapport à 10^{-4} .

La valeur de a devient alors :

$$a = - \frac{m + \sqrt{m^2 - \frac{4qx}{K}}}{2x} \quad (27)$$

Cette expression est facile à calculer pour chaque valeur de q et de x et, en la portant dans (23), on obtiendra la valeur correspondante de y .

Le tableau ci-après et la figure 27 donnent les résultats d'application de cette formule avec les données suivantes :

$$\begin{aligned} m &= 0,2 ; \\ K &= 0,001 ; \\ q &= 0,000001. \end{aligned}$$

Les y_{10} correspondent à $q = 0,000001$ et représentent la surface libre de la nappe.

Les y_2, y_4, y_6, y_8 correspondent à :

$$\begin{aligned} q &= 0,0000002 \\ q &= 0,0000004 \\ q &= 0,0000006 \\ q &= 0,0000008 \end{aligned}$$

et divisent la nappe en cinq filets de débit égal.

Les y_0 correspondent à la surface du fond imperméable.

x	y_{10}	y_8	y_6	y_4	y_2	y_0
2	— 0,652	— 0,654	— 0,655	— 0,657	— 0,658	— 0,660
4	— 0,780	— 0,784	— 0,788	— 0,792	— 0,796	— 0,800
6	— 0,848	— 0,855	— 0,862	— 0,868	— 0,874	— 0,881
8	— 0,894	— 0,904	— 0,913	— 0,922	— 0,930	— 0,938
10	— 0,921	— 0,937	— 0,950	— 0,963	— 0,973	— 0,983

Nous nous bornerons à ces trois cas principaux, en ce qui concerne l'étude des nappes cylindriques à débit constant et à

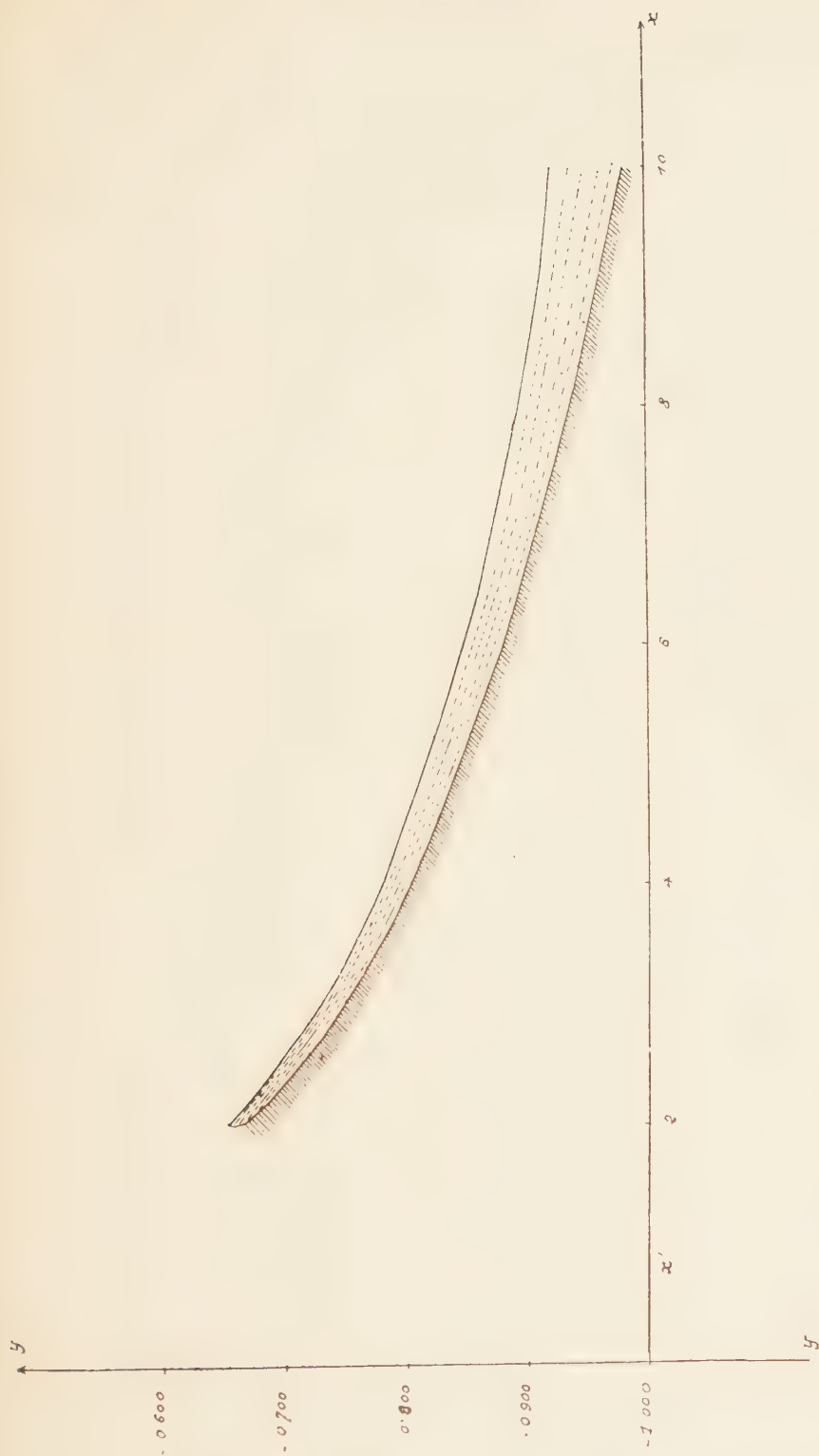


Fig. 27.

Échelle des hauteurs = 10 fois échelle des longueurs.

régime uniforme coulant dans un sol homogène sur un fond imperméable.

*
* *

IV. **Étude générale d'une nappe cylindrique à régime propre non influencé coulant dans un sol homogène sur un fond imperméable, le débit de la nappe n'étant pas limité.** — Si le régime de la nappe n'est pas uniforme, nous ne pouvons pas admettre comme précédemment que $y = f(x, q)$.

La valeur de y variant également avec le temps, nous aurons $y = f(x, q, t)$.

y est donc, dans le cas général, fonction de trois variables indépendantes.

Il peut arriver, dans certains cas particuliers, qu'il soit possible d'établir une relation entre deux de ces variables, et y devient fonction de deux variables seulement.

Considérons par exemple une nappe à régime non influencé, c'est-à-dire pour laquelle il n'existe pas d'apports d'eau extérieurs ni de déperdition autre que celle qui se fait par le seuil. Supposons, en outre, que l'émissaire, et par suite la nappe, puissent avoir un débit non limité supérieurement.

Pour une telle nappe, la dérivée par rapport au temps du volume d'eau contenu dans la nappe est égale au débit changé de signe.

Si le régime était permanent, la valeur de y serait une fonction de x et de q :

$$y = f(x, q)$$

dont la forme dépendrait de la forme du fond imperméable.

La nappe étant comprise entre les ordonnées $x = 0$ et $x = L$, le volume d'eau contenu dans la nappe sera

$$V = \mu \int_0^L f(x, q) dx \quad (28)$$

μ étant le coefficient de perméabilité défini au début du chapitre.

La dérivée de V par rapport au temps sera :

$$\frac{dV}{dt} = \mu \int_0^L \frac{\partial f}{\partial q} dx \times \frac{dq}{dt}.$$

En égalant à $-q$ la valeur de $\frac{dV}{dt}$, on obtient :

$$-\mu \int_0^L \frac{\partial f}{\partial q} dx \times \frac{dq}{q} = dt. \quad (29)$$

Cette relation (29) donne après intégration :

$$q = \varphi(t)$$

et l'on a :

$$y = f[\varphi(t), x] = F(t, x).$$

y est donc alors fonction de deux seules variables indépendantes, x et t .

*
* * *

V. Cas particulier d'un fond imperméable horizontal. — Dans ce cas, la valeur de y est donnée en régime permanent par l'équation (19).

$$y = \frac{2}{K} \sqrt{-q(Kx - q)}. \quad (19)$$

Le volume d'eau compris dans la nappe entre les ordonnées — L et 0 est :

$$V = \mu \int_{-L}^0 \frac{2}{K} \sqrt{-q(Kx - q)} dx.$$

Cette formule donne, après intégration :

$$V = \frac{4\sqrt{q}}{3K^{\frac{3}{2}}\mu} \left[(q + KL)^{\frac{3}{2}} - q^{\frac{3}{2}} \right]. \quad (30)$$

Telle est la valeur exacte du volume d'eau contenu dans la nappe.

Remarque. — Pour comparer notre résultat avec ceux trouvés précédemment, calculons V en fonction de la hauteur H de la surface de la nappe au point d'ordonnée — L .

On a, d'après (19) :

$$H = \frac{2}{K} \sqrt{-q(KL + q)} \\ H^2 = \frac{4q}{K^2} (KL + q) \quad \text{ou} \quad KL + q = \frac{K^2 H^2}{4q}. \quad (31)$$

Portant cette valeur de $KL + q$ dans (30), il vient :

$$V = \frac{4}{3} \frac{\mu}{K^2} \left[\frac{K^3 H^3}{8q} - q^2 \right] : \quad (32)$$

On tire de (31) :

$$q = \frac{K}{2} \left[\sqrt{L^2 + H^2} - L \right].$$

et, en portant cette valeur dans (32), il vient en définitive :

$$V = \frac{\mu}{3} \left[H (\sqrt{L^2 + H^2} + L) - 2L^2 - H^2 + 2L \sqrt{L^2 + H^2} \right] \quad (33)$$

Or, avec nos notations, M. Maillet trouve (1) :

$$V = \frac{2}{3} \mu LH (1 + \varepsilon') \quad (\varepsilon' = 0 \text{ pour } h = 0)$$

et M. Boussinesq (2) :

$$V = \frac{2}{3} \mu \frac{LH}{0,86236}.$$

Or, lorsque le ε de M. Maillet devient nul, h devient nul et par suite H aussi.

(1) MAILLET, Essais d'hydraulique souterraine et fluviale, p. 38.

(2) BOUSSINESQ, *J. Math. pures et appliquées*, 1904, IV, p. 25.

Supposons que H , sans s'annuler, devienne assez petit pour que l'on puisse négliger H^2 par rapport à L^2 et *a fortiori* par rapport à $2L^2$.

Notre formule (33) devient :

$$V = \frac{2}{3} \frac{q}{L} H.$$

C'est précisément la formule de M. Maillet pour $\varepsilon' = 0$.

Posons maintenant $\frac{H}{L} = m$ et voyons pour quelle valeur de m il y a équivalence entre la formule de M. Boussinesq et celle que nous proposons.

Pour cette valeur, on aura :

$$\frac{2}{3} [m(\sqrt{1+m^2} + 1) - 2 - m^2 + 2\sqrt{1+m^2}] = \frac{2}{3} \frac{mq}{0,86236},$$

d'où l'on déduit $m = 1,28$.

La formule que nous proposons est donc équivalente à celle de M. Maillet pour les petits débits et à celle de M. Boussinesq lorsque la hauteur à l'amont de la nappe est égale à 1,28 fois sa longueur, ce qui peut être considéré pratiquement comme un cas extrême.

Il est à remarquer que, pour arriver à sa formule, M. Boussinesq (1) a fait l'hypothèse que la charge φ est la même en chaque point d'une même verticale, hypothèse que nous n'avons pas admise pour l'établissement de notre formule.

Nous pouvons donc adopter comme exacte la formule (33), et par suite la formule (30) dont elle est déduite et qui donne le volume V contenu dans la nappe en fonction de son débit q .

Mais cette formule donne lieu à des calculs trop compliqués pour être utilisée pratiquement.

Nous envisageons ici le cas de débits très petits. Il est, par

(1) M. BOUSSINESQ, *J. Math. pures et appliquées*, 1904, IV, p. 13.

conséquent, possible de négliger q par rapport à KL et $q^{\frac{3}{2}}$ par rapport à $HL^{\frac{3}{2}}$.

Nous aurons alors :

$$V = \frac{4\sqrt{q}L^3}{3K^2} (KL)^{\frac{3}{2}} = \frac{4L^3}{3} \sqrt{\frac{L^3}{K}} \sqrt{q} \quad (34)$$

et nous adopterons par suite pour y la valeur simplifiée :

$$y = \frac{2}{K} \sqrt{-qKx} \quad (35)$$

Ceci posé, et par application de la théorie exposée au paragraphe IV, dérivons V par rapport à q .

Nous avons :

$$\frac{dV}{dq} = \frac{2L^3}{3} \sqrt{\frac{L^3}{K}} \frac{1}{\sqrt{q}}$$

Écrivant que la dérivée de V par rapport à t est égale à $-q$, nous obtenons :

$$\frac{2L^3}{3} \sqrt{\frac{L^3}{K}} \frac{1}{\sqrt{q}} \frac{dq}{dt} = -q$$

qui donne par intégration :

$$\frac{4L^3}{3} \sqrt{\frac{L^3}{K}} \frac{1}{\sqrt{q}} = t + \text{cte} \quad (36)$$

Fixons la constante par la condition qu'à l'origine des temps, l'ordonnée de la surface libre au point d'abscisse ($-L$) soit égale à H_0 .

Le débit q_0 à cet instant sera donné par :

$$H_0 = \frac{2}{K} \sqrt{q_0 KL} \quad \text{d'où} \quad q_0 = \frac{KH_0^2}{4L}$$

Portons cette valeur de q_0 dans (36) et faisons $t = 0$, nous obtenons :

$$C^{te} = \frac{8 \mu L^2}{3 K H_0}$$

et la valeur de q sera :

$$q = \frac{K H^2}{4 L} \times \frac{1}{\left(\frac{3 K H_0}{8 \mu L^2} t + 1 \right)^2}$$

Posons :

$$\frac{K H_0}{4 L} = A ;$$

$$\frac{3 K H_0}{8 \mu L^2} = x ;$$

nous obtenons :

$$q = \frac{A}{(1 + xt)^2} \quad (37)$$

(C'est à la même formule qu'arrivent MM. Boussinesq et Maillet (1), à la valeur des coefficients près. Donc, ainsi que nous l'avons fait remarquer plusieurs fois au cours de cette étude, les hypothèses qu'ils ont faites ne changent pas l'allure générale des phénomènes étudiés, mais seulement les résultats numériques.)

Portons cette valeur de q dans (35). Nous obtiendrons la valeur de y en fonction de x et de t .

$$y = \frac{2}{1 + xt} \sqrt{\frac{-Ax}{K}} \quad (38)$$

Les tableaux ci-après sont une application des formules (37) et (38) avec les données ci-après :

(1) MAILLET, Hydraulique souterraine et fluviale, p. 39.

$$\begin{aligned} K &= 0,0001; \\ \alpha &= 0,30; \\ L &= 5; \\ H_0 &= \sqrt{0,1} = 0,31623; \end{aligned}$$

on en déduit :

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{KH_0^3}{4L} = 5 \times 10^{-7} \\ \alpha &= \frac{3KH_0}{8\mu L^2} = 0,158115 \times 10^{-5}. \end{aligned}$$

Le temps est exprimé en secondes.

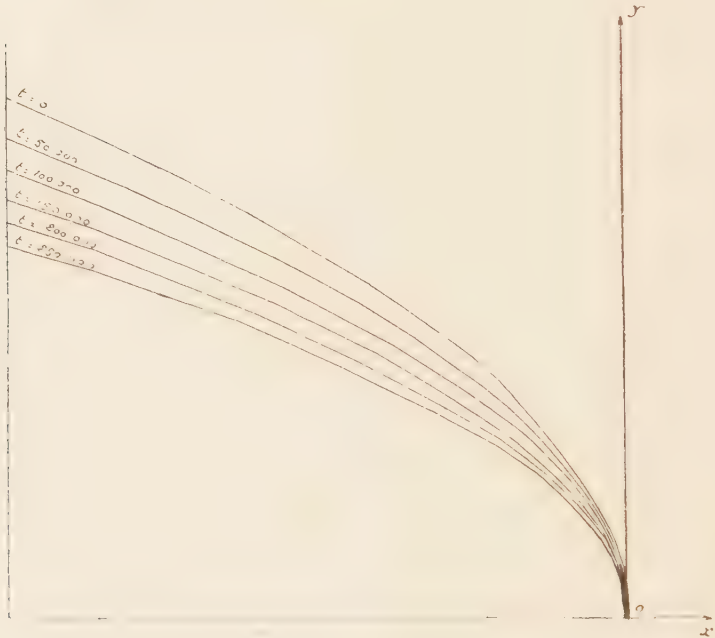


Fig. 28.

Échelle des hauteurs = $\frac{40}{3}$ fois échelle des longueurs.

La figure 28 donne la forme de la surface libre à diverses époques.

La figure 29 donne le graphique du débit en fonction du temps.

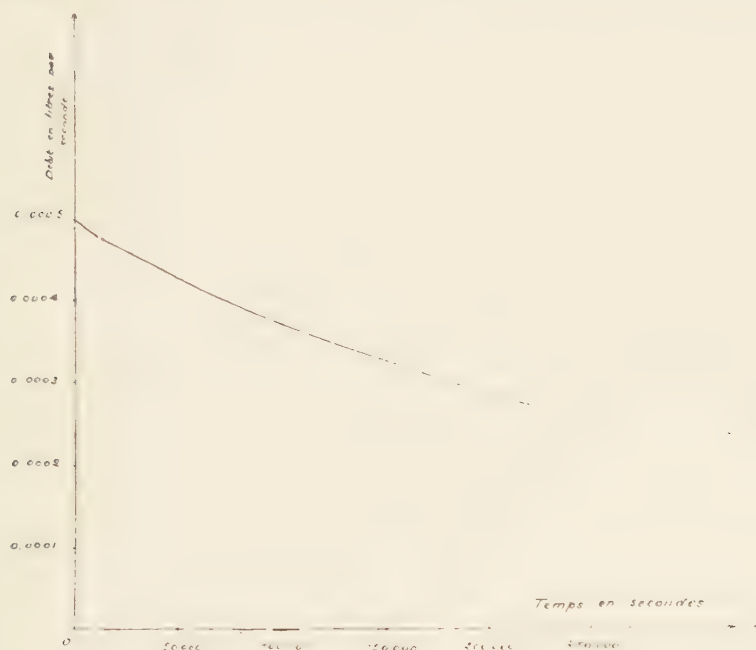


Fig. 29.

Temps.	Valeur de y pour $x =$						Débit $\times 10^7$
	0	1	2	3	4	5	
0	0,000	0,141	0,200	0,245	0,283	0,316	5,00
50 000	0,000	0,131	0,185	0,227	0,262	0,292	4,28
100 000	0,000	0,122	0,173	0,211	0,244	0,273	3,73
150 000	0,000	0,114	0,162	0,198	0,228	0,255	3,27
200 000	0,000	0,108	0,152	0,186	0,215	0,240	2,88
250 000	0,000	0,101	0,143	0,176	0,203	0,226	2,57

VI. Étude générale d'une nappe cylindrique à régime propre non influencé coulant dans un sol homogène sur un fond imperméable, le débit étant limité supérieurement. — Nous n'étudierons les formes de la

nappe que dans le cas où son débit est égal au débit limite q_0 . S'il lui était inférieur, nous nous trouverions dans le cas étudié au paragraphe IV.

Au fond imperméable donné correspondra pour y en régime permanent la valeur $y = F(x, q)$.

Cette fonction contiendra une ou plusieurs constantes arbitraires, a , b , etc.

On a donc :

$$y = F(x, q, a, b, \dots) \quad (38 \text{ bis})$$

Le volume d'eau contenu dans la nappe est :

$$V = \mu \int_0^L F(x, q, a, b, \dots) dx$$

Or les constantes a et b du régime permanent restent toujours indépendantes de x et de q en régime varié, mais deviennent fonction du temps.

Contrairement à ce qui se passe lorsque le débit de la source n'est pas limité supérieurement, q n'est pas fonction du temps, mais garde une valeur constante.

La dérivée de V par rapport au temps est donc :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \mu \int_0^L \left(\frac{\partial F}{\partial a} \frac{da}{dt} + \frac{\partial F}{\partial b} \frac{db}{dt} + \dots \right) dx. \quad (39)$$

Cette dérivée est constante et égale au débit changé de signe.

On a donc :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -q,$$

d'où, en intégrant :

$$V = -qt + c^te. \quad (40)$$

Si F ne contient qu'une seule constante arbitraire a , la relation (40) donnera :

$$a = \varphi(t),$$

et en portant dans (38 bis) on obtient :

$$y = F [x, q, \varphi (t)],$$

c'est-à-dire :

$$y = f (x, q, t),$$

et le problème est complètement déterminé

* * *

VII. Cas particulier d'un fond imperméable horizontal. — L'équation donnant la valeur de y pour un fond horizontal dans le cas du débit constant et du régime uniforme est l'équation (18).

$$y = \frac{2}{K} \sqrt{-q [K (x + m) - q]}.$$

Cette équation ne contient qu'une seule constante arbitraire et, d'après ce que nous avons vu au paragraphe précédent, le problème sera complètement déterminé.

Comme nous n'envisageons que des nappes de faible débit, nous pourrions négliger q par rapport à $K (x + m)$ et écrire :

$$y = 2 \sqrt{\frac{q}{K} (x + m)}. \quad (41)$$

Le volume d'eau contenu dans la nappe est :

$$V = 2 q \sqrt{\frac{q}{K}} \int_0^L \sqrt{x + m} dx \\ = \frac{4 q}{3} \sqrt{\frac{q}{K}} \left[\sqrt{m^3} - \sqrt{(L - m)^3} \right].$$

Portant cette valeur de V dans (40), nous obtenons :

$$- \frac{4 q}{3} \sqrt{\frac{q}{K}} \left[\sqrt{-m^3} - \sqrt{(L - m)^3} \right] = qt + c^te$$

qui peut s'écrire :

$$\frac{4\mu}{3\sqrt{q}K} \left[\sqrt{(L-m)^3} - \sqrt{-m^3} \right] = t + \text{cte.} \quad (42)$$

Ainsi que nous l'avons fait au paragraphe IV, nous déterminerons la constante arbitraire par la condition que, pour $t = 0$, $x = -L$, on ait $y = H_0$.

Dans ces conditions, l'équation (41) donne :

$$H_0 = 2\sqrt{\frac{q}{K}} \sqrt{1-m}.$$

On en déduit :

$$L-m = \frac{H_0^2 K}{4q} \quad m = L - \frac{H_0^2 K}{4q}.$$

Portons ces valeurs dans (42) en y faisant $t = 0$.

Il vient :

$$C = \frac{\mu K}{6q^2} \left[H_0^3 - \left(H_0^3 - \frac{4qL}{K} \right)^{\frac{3}{2}} \right].$$

et l'on obtient :

$$t = \frac{\mu K}{6q^2} \left[H_0^3 - \left(H_0^3 - \frac{4qL}{K} \right)^{\frac{3}{2}} \right] - \frac{4\mu}{3\sqrt{Kq}} \left[\sqrt{(L-m)^3} - \sqrt{-m^3} \right]. \quad (43)$$

La conduite normale du calcul consisterait à tirer de cette équation (43) la valeur de m et à la porter dans l'équation (41). Nous obtiendrions ainsi y en fonction de x , q et t . Mais cette méthode n'est pas applicable pratiquement, car l'équation (43) est du sixième degré en m . Elle est au contraire du premier degré en t . Nous conduirons donc les calculs de la manière suivante :

Nous donnerons à m une série de valeurs. Nous en déduirons les valeurs de t correspondantes à l'aide de l'équation (43) et les valeurs de y correspondantes à l'aide de l'équation (41). Nous aurons ainsi y en fonction de t .

Application numérique. — Nous ferons l'application numérique correspondant aux données ci-après :

$$\begin{aligned} K &= 0,0001; \\ \mu &= 0,30; \\ L &= 5; \\ H_0 &= \sqrt{0,40} = 0,31623; \\ q &= 5 \times 10^{-7}. \end{aligned}$$

Ces données numériques ont été choisies de manière à ce que, au temps $t = 0$, la nappe soit identique à celle étudiée au paragraphe IV.

A partir du moment où le débit de la nappe sera inférieur à 5×10^{-7} , l'écoulement se fera donc conformément aux graphiques étudiés au paragraphe IV.

Avec ces données numériques, l'équation (41) devient :

$$y = 0,14142 \sqrt{-(x + m)} \quad (44)$$

et l'équation (43) devient :

$$t = 632,460 - 56,568 [\sqrt{(5 - m)^3} - \sqrt{-m^3}]. \quad (45)$$

L'équation (45) fait correspondre aux valeurs indiquées de m , les valeurs de t ci-après :

m	t
— 0,31	— 52 000
— 0,67	— 101 900
— 1,08	— 152 100
— 1,45	— 195 400
— 1,75	— 228 600

A ces mêmes valeurs de m correspondent des valeurs de y données par l'équation (44).

Le tableau ci-après donne les valeurs de y en fonction de x et de t . Nous y avons fait également figurer, ainsi que sur la figure 30, les résultats obtenus au paragraphe IV pour que

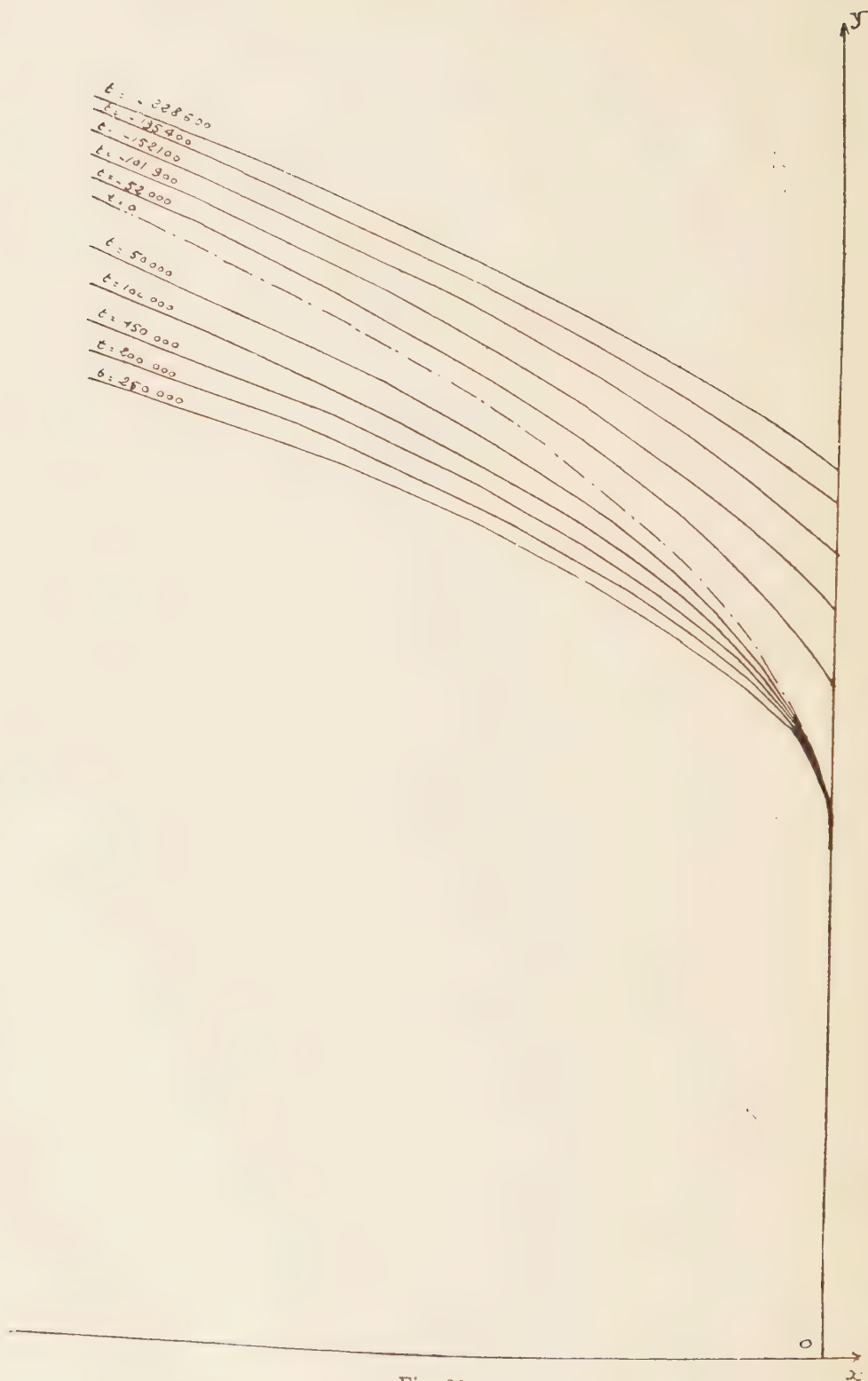


Fig. 30.

Échelle des hauteurs $= \frac{40}{3}$ fois celle des longueurs.

l'on puisse se rendre compte de la continuité des deux modes d'écoulement.

En outre, nous avons ajouté aux diverses valeurs de y une quantité fixe de 0^m,25 représentant la hauteur capillaire τ , afin que l'on puisse comparer les résultats obtenus avec ceux constatés dans la pratique (Voy. remarque, p. 160).

Temps.	Valeur de y pour $x =$						Débit $\times 10^7$
	0	— 1	— 2	— 3	— 4	— 5	
— 228 600	0,437	0,485	0,524	0,558	0,589	0,617	5,00
— 195 400	0,420	0,471	0,513	0,548	0,580	0,610	5,00
— 152 100	0,397	0,454	0,498	0,536	0,568	0,599	5,00
— 101 900	0,366	0,433	0,481	0,521	0,556	0,587	5,00
— 52 000	0,329	0,412	0,465	0,507	0,544	0,576	5,00
0	0,250	0,391	0,450	0,495	0,533	0,566	5,00
50 000	0,250	0,381	0,435	0,477	0,512	0,542	4,28
100 000	0,250	0,372	0,423	0,461	0,494	0,523	3,73
150 000	0,250	0,364	0,412	0,448	0,478	0,505	3,27
200 000	0,250	0,358	0,402	0,436	0,465	0,490	2,88
250 000	0,250	0,351	0,393	0,426	0,453	0,476	2,57

Nous avons indiqué sur la figure 31 le graphique en fonction du temps et dans les deux modes d'écoulement :

- 1° De la quantité d'eau contenue dans la nappe ;
- 2° Du débit ;
- 3° De l'ordonnée y_0 au seuil de la nappe ;
- 4° De l'ordonnée y_L au sommet de la nappe.

L'instant $t = 0$ marque la délimitation des deux modes d'écoulement.

* * *

VIII. Comparaisons des résultats théoriques ci-dessus avec les résultats d'expérience. — Dans des expériences faites en Sologne en 1855 et 1856, Delacroix disposait entre deux drains T et T' (fig. 32) et dans un plan perpendiculaire à ces drains, cinq tubes verticaux en tôle de 5 centimètres de diamètre, percés de trous sur les côtés et munis à

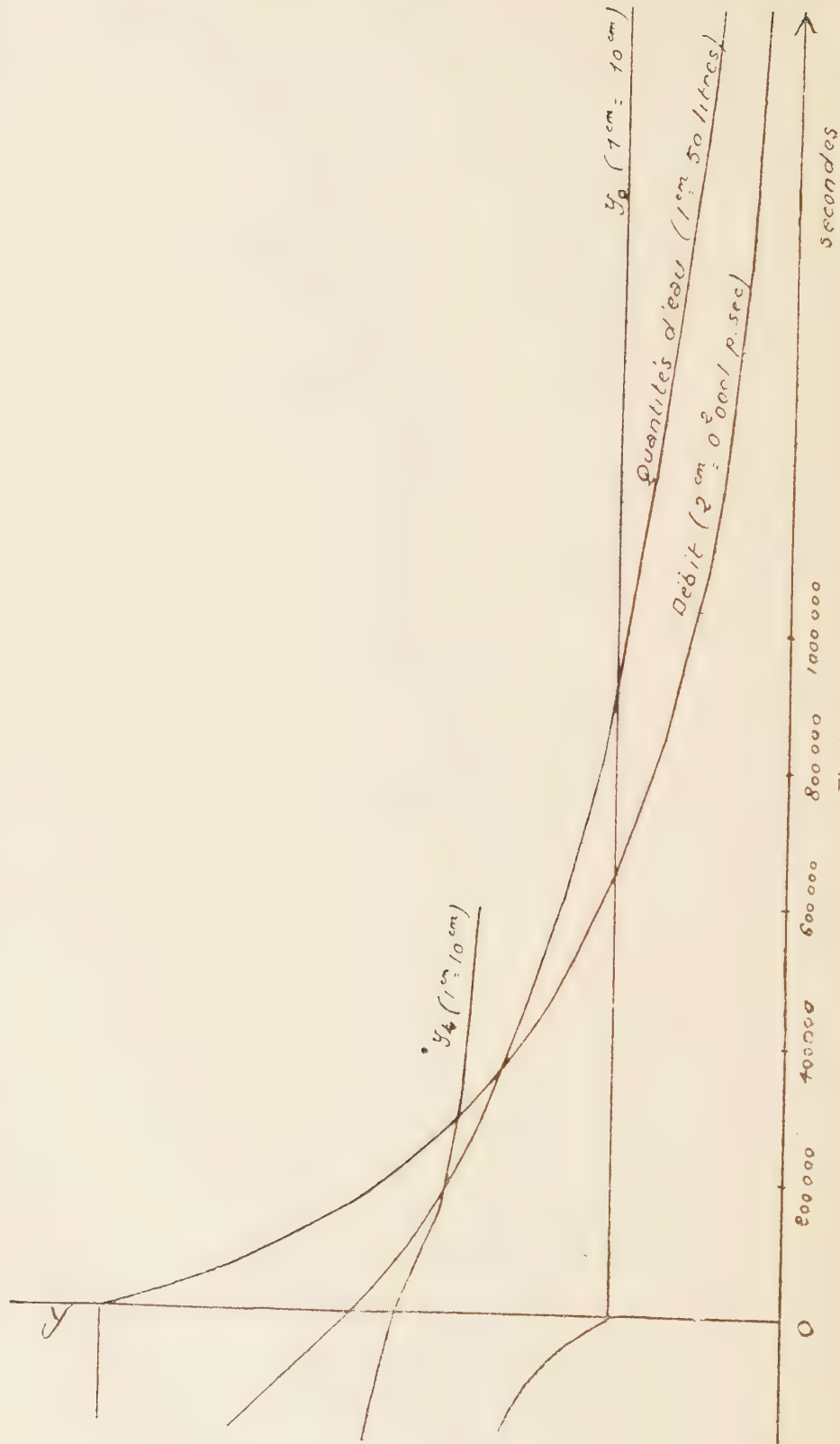


Fig. 31.

leur partie supérieure d'un couvercle protecteur. Les fonds de ces tubes étaient situés au-dessous du niveau TT' et leurs sommets aboutissaient à une même ligne horizontale xx' vis-à-vis de laquelle on relevait le profil du terrain, la profondeur des drains et les ordonnées du niveau de l'eau dans

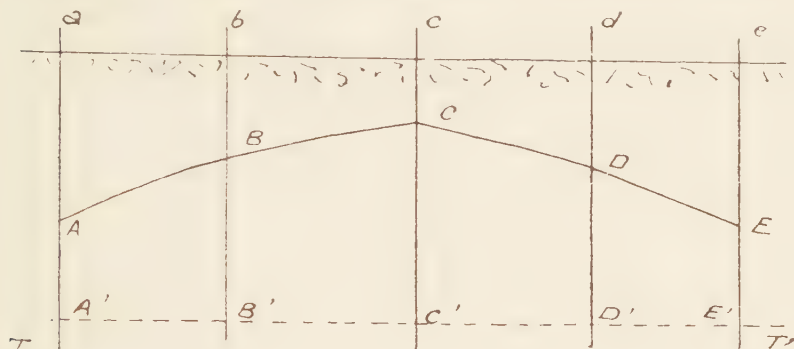


Fig. 32.

les tubes, mesurées au moyen d'une baguette qu'on y plongeait à chaque observation.

Delacroix appelle *charge d'eau* les hauteurs AA' , BB' ... EE' de l'eau dans les tubes au-dessus de la ligne des drains. AA' et EE' , qui donnent la position de l'eau près des drains, sont les *charges initiales*.

Delacroix appelle en outre *pente par mètre* le rapport

$$\frac{CC' - AA'}{AC'} = \frac{CC' - EE'}{EC'}$$

et *pente totale*

$$CC' - AA' = CC' - EE'.$$

Les conditions dans lesquelles s'est placé Delacroix pour faire ses expériences correspondent aux hypothèses que nous avons faites aux paragraphes V et VII, c'est-à-dire au cas d'une nappe cylindrique à régime non influencé coulant sur un fond imperméable horizontal.

Si le débit du drain est supérieur à celui de la nappe, ce sera l'hypothèse du paragraphe V. Dans le cas contraire, le débit de la nappe sera limité supérieurement, et ce sera le cas étudié au paragraphe VII.

Le plan horizontal contenant les deux drains T et T' peut être considéré comme un fond imperméable horizontal, car en dessous de lui se trouve un sol imbibé d'eau à refus, c'est-à-dire imperméable. Par raison de symétrie (symétrie constatée d'ailleurs pratiquement par Delacroix), les deux moitiés de la nappe s'écoulent chacune dans le drain correspondant, et l'on peut considérer le drain T comme évacuant la partie AA'CC' de la nappe.

Ceci posé, Delacroix a trouvé les lois ci-après (1) :

Quand le débit augmente, la charge et la pente par mètre de la nappe augmentent.

Quand le débit diminue, la charge et la pente par mètre de la nappe diminuent.

Dans les terres franches, le sommet de la nappe est plus bas que dans les sols argileux, en même temps que la pente par mètre est beaucoup moins forte.

Cherchons à retrouver sur les formules que nous proposons ces résultats expérimentaux.

Tout d'abord, il est à remarquer que Delacroix se place dans l'hypothèse où le débit de la nappe n'est pas limité supérieurement :

C'est l'hypothèse de notre paragraphe V.

L'équation de la surface libre de la nappe est l'équation (19) :

$$y = \frac{2}{K} \sqrt{-q(Kx - q)}.$$

Soit L la longueur de la nappe.

La charge initiale sera :

(1) FAURE, Drainage et assainissement agricole des terres, p. 92.

$$y_0 = \frac{2q}{K}. \quad (46)$$

L'ordonnée du sommet de la nappe sera :

$$y_1 = \frac{2}{K} \sqrt{q(KL + q)}. \quad (47)$$

La pente sera par mètre :

$$I = \frac{2}{KL} \left[\sqrt{q(KL + q)} - q \right]. \quad (48)$$

La formule (46) montre que y_0 augmente et diminue en même temps que q , ce qui vérifie bien que la charge augmente et diminue avec le débit.

Dérivons la formule (48) par rapport à q ; nous obtenons :

$$\frac{dI}{dq} = \left[\frac{KL + 2q}{2\sqrt{q(KL + q)}} - 1 \right] \frac{2}{KL}.$$

Or $LK + 2q$ est supérieur à $2\sqrt{q(KL + q)}$.

En effet, élevons ces deux quantités, qui sont positives, au carré; on obtient :

$$K^2L^2 + 4qKL + 4q^2 > 4qKL + 4q^2.$$

La quantité entre crochets est donc toujours positive. $\frac{dI}{dq}$ l'est donc aussi, et la pente par mètre de la nappe augmente et diminue bien en même temps que le débit, ce qui vérifie la deuxième partie des deux premières lois de Delacroix.

Dérivons maintenant la formule (47) par rapport à K ; nous obtenons :

$$\frac{dy_1}{dK} = -\sqrt{q} \frac{KL + 2q}{K^2\sqrt{KL + q}},$$

quantité négative; donc y_1 décroît quand K augmente, ce qui vérifie la première partie de la troisième loi de Delacroix, à savoir que dans les terres franches (où K est grand) le

sommet de la nappe est plus bas que dans les sols argileux (où K est petit).

Dérivons enfin la formule (48) par rapport à K; nous obtenons :

$$\frac{dI}{dK} = q \frac{2\sqrt{q(KL+q)} - [KL+2q]}{K^2L\sqrt{q(KL+q)}};$$

or, le dénominateur et le facteur q sont positifs.

Comparons les quantités

$$2\sqrt{q(KL+q)} \quad \text{et} \quad KL+2q.$$

Ces quantités étant positives, nous pouvons comparer leurs carrés. Or $4qKL + 4q^2 < K^2L^2 + 4qKL + 4q^2$, et le dénominateur est toujours négatif.

I décroît donc lorsque K croît, et réciproquement, ce qui vérifie la deuxième partie de la dernière loi de Delacroix, savoir que, dans les terres franches (K grand), la pente par moitié est beaucoup moins forte que dans les sols argileux (K petit).

Les formules établies au cours de cette étude permettent donc d'expliquer tous les résultats trouvés par Delacroix au cours de ses expériences.

IX. Considérations pratiques. Application au drainage. — L'examen des graphiques de la figure 31 du paragraphe VII montre qu'avec des données numériques de l'ordre de grandeur de celles rencontrées dans la pratique, la période active d'assainissement est limitée à l'époque où le débit propre de la nappe devient inférieur au débit maximum des drains (instant 0 du graphique).

En effet, à partir de cet instant, le débit diminue très rapidement; la quantité d'eau évacuée est, par suite, faible. En outre, les ordonnées de la surface libre de la nappe diminuent beaucoup plus lentement.

Il faudra donc, au point de vue pratique, que l'assainissement voulu soit obtenu à cet instant.

Le débit des drains d'un réseau de drainage est calculé de manière à ce qu'ils puissent évacuer un cube déterminé par

hectare et par seconde, généralement 1 litre. Nous adopterons ce chiffre pour la suite de nos calculs. Si l'on désirait adopter un autre chiffre, les modifications seraient faciles à faire.

Soit $2L$ l'écartement des drains (fig. 33). La longueur de la nappe sera L et la surface assainie par une tranche de 1 mètre

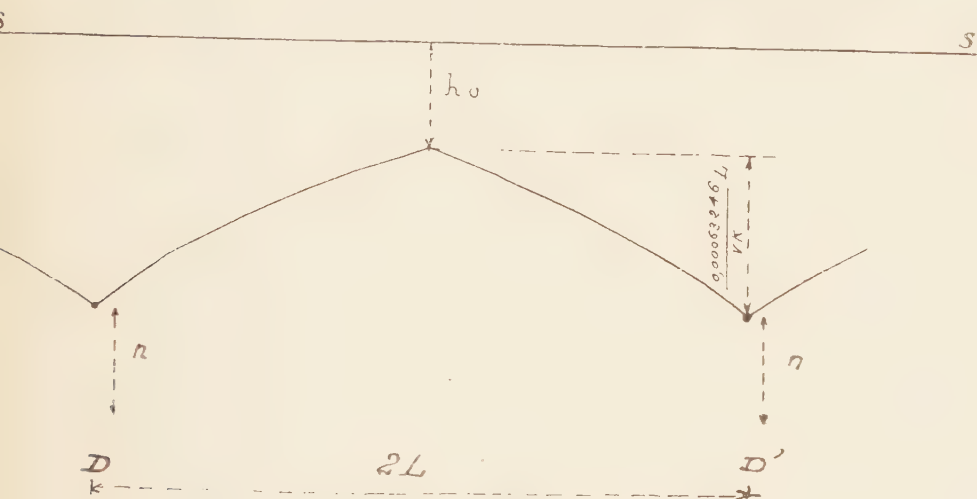


Fig. 33.

de large sera également L mètres carrés. Le débit maximum de la nappe sera donc $q_0 = L \times 10^{-7}$ mètres cubes par seconde.

L'équation de la surface libre de la nappe au moment où son débit devient égal à q_0 est (formule 35) :

$$y = 2\sqrt{\frac{q_0}{K}}\sqrt{L-x} = 2\sqrt{\frac{L \times 10^{-7}}{K}}\sqrt{L-x}.$$

En faisant $x = L$, nous obtiendrons la valeur de l'ordonnée au sommet

$$H = 2\sqrt{\frac{L^2 \times 10^{-7}}{K}} = \frac{0,00063246}{\sqrt{K}} L.$$

La pente par mètre définie par Delacroix est alors égale à :

$$\frac{0,00063246}{\sqrt{K}}. \quad (48 \text{ bis})$$

Supposons que l'on veuille obtenir un abaissement de l'eau à une profondeur minima de h_0 au-dessous du sol. Soit, par ailleurs, r_1 la hauteur capillaire. La profondeur de la tranchée au-dessous du sol devra être égale à :

$$P = h_0 + r_1 + \frac{0,00063246}{\sqrt{K}} L. \quad (49)$$

Cette relation qui lie la profondeur à l'écartement des drains peut être utilisée dans divers problèmes relatifs au drainage.

Elle permet, lorsque, par des conditions particulières, l'un des deux éléments (profondeur ou écartement) du drainage est fixé *a priori*, de déterminer l'autre élément.

Elle permet, lorsque le choix de ces deux éléments reste libre, de les déterminer par une seconde condition, par exemple que le prix de revient soit minimum.

Premier exemple. — Soit une terre dans laquelle, en raison de la présence d'un sous-sol rocheux, il soit impossible de descendre les tranchées à plus de 1 mètre de profondeur.

Le sol est caractérisé par les constantes ci-après :

$$K = 0,0001;$$

$$r_1 = 0,15.$$

On veut obtenir un abaissement de l'eau d'au moins 0^m,50 au-dessous du sol.

La formule (49) donne :

$$1,00 = 0,50 + 0,15 + \frac{0,00063246}{\sqrt{0,0001}} L.$$

$$L = 5^m,10$$

Les drains seront donc placés à 14 mètres d'écartement.

Deuxième exemple. — Soit à drainer un verger planté de pommiers placés aux intersections de deux réseaux perpendiculaires de parallèles équidistantes de 10 mètres. Les drains

étant dirigés parallèlement aux diagonales des carrés ainsi formés, leur écartement sera de $10\sqrt{2} = 14$ mètres environ.

Le sol est caractérisé par les constantes ci-après :

$$\begin{aligned} K &= 0,00005 ; \\ r_1 &= 0,20 . \end{aligned}$$

On veut obtenir un abaissement de l'eau d'au moins 0^m,30 au-dessous du sol.

La formule (49) donne :

$$P = 0,30 + 0,20 + \frac{0,00063246}{\sqrt{0,00005}} \times 7 = 4,39 .$$

Cette grande profondeur s'explique par le fait que le sol envisagé est très imperméable et que l'écartement imposé est grand.

Troisième exemple. — Recherche du devis minimum.

Il est possible de donner le prix de revient d'un mètre courant de drainage par un trinôme du second degré où la variable est la profondeur de cette tranchée.

Soit :

$$t = AP^2 + BP^2 + C. \quad (50)$$

La formule (49) peut par ailleurs s'écrire :

$$P = \alpha + \beta L. \quad (51)$$

La longueur des drains par unité de surface du drainage est $\frac{1}{2L}$, c'est-à-dire proportionnelle à $\frac{1}{L}$.

Le prix de revient du drainage par unité de surface sera donc proportionnel à $\frac{t}{L}$.

Or, d'après (50) et (51) :

$$t = A(\alpha + \beta L)^2 + B(\alpha + \beta L) + C.$$

Le prix de revient du drainage par unité de surface est donc proportionnel à :

$$\frac{A(\alpha + \beta L)^2 + B(\alpha + \beta L) + C}{L} = D. \quad (52)$$

Prenons la dérivée de D par rapport à L ; nous obtenons :

$$\frac{dD}{dL} = \frac{L^2 A \beta^2 - A \alpha^2 - B \alpha - C}{L^2},$$

qui s'annule en passant du négatif au positif par :

$$L = \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{A \alpha^2 + B \alpha + C}{A}}.$$

Donc à cette valeur de L correspond un minimum des dépenses à faire à l'hectare.

En portant cette valeur de L dans (51), on obtiendra la profondeur correspondante.

Application. — Soit un terrain caractérisé par les constantes ci-après :

$$K = 0,0001 ;$$

$$\gamma = 0,20.$$

On veut obtenir un abaissement de l'eau d'au moins 0^m,50 au-dessous du sol.

Le prix de revient du mètre courant de drainage est :

$$t = 0,15 + 0,04 P + 0,40 P^2$$

(Prix d'avant-guerre).

On a donc :

$$A = 0,40 ;$$

$$B = 0,04 ;$$

$$C = 0,15 ;$$

$$\alpha = 0,50 + 0,20 = 0,70 ;$$

$$\beta = 0,063246.$$

Le demi-écartement qui donnera le minimum de dépenses à l'hectare sera donc :

$$L = \sqrt{\frac{0,40 \times 0,7^2 + 0,04 \times 0,7 + 0,15}{0,40}} \times \frac{1}{0,063246} = 15^m,20,$$

soit 30 mètres pour l'écartement des drains.

La profondeur correspondante est :

$$P = 0,70 + 0,063246 \times 15,00 = 1^m,65.$$

On est donc amené à drainer très large et très profond, ce qui a été préconisé par beaucoup de praticiens. Mais il faut, avant d'appliquer les résultats du calcul, s'assurer que le terrain est bien homogène jusqu'à la profondeur calculée.

Cas des terrains en pente. — Les calculs ci-dessus ont été faits en supposant le terrain horizontal. Il serait possible de faire des calculs analogues pour étudier le problème dans le cas de terrains inclinés. Ces calculs seraient longs et leurs résultats seraient compliqués.

Il est suffisant, dans la pratique, d'utiliser la formule de Barré de Saint-Venant, pour étendre aux terrains inclinés les résultats trouvés en terrain horizontal.

Soient :

H la profondeur des tuyaux de drainage au-dessous de la surface du sol ;

h la profondeur minima à laquelle on désire maintenir la nappe souterraine ;

h_1 la charge initiale définie par Delacroix ;

$\text{tg } \alpha$ la plus grande pente du sol supposé plan ;

$\text{tg } \beta$ la pente par mètre de la nappe horizontale définie par Delacroix ;

$\text{tg } \gamma$ la pente des drains supposés orientés dans une direction quelconque.

La formule de Barré de Saint-Venant donne pour la distance δ de deux drains :

$$\delta = 2 (H - h - h_1) \sqrt{\frac{\text{tg}^2 \beta - \text{tg}^2 \gamma}{\text{tg}^2 \beta - \text{tg}^2 \alpha}},$$

Mais, ainsi que le fait remarquer Faure (1), l'utilisation de cette formule nécessite la connaissance de $\text{tg } \beta$.

(1) FAURE, Drainage et assainissement, p. 125.

Or, nous avons calculé, pour un terrain donné, $\operatorname{tg} \beta$ et l'avons trouvée égale à :

$$\frac{0,00063246}{\sqrt{K}}. \quad \text{formule (48 bis)}$$

Il ne restera plus, dans la formule de Barré de Saint-Venant, que deux inconnues H et z . Elle permettra donc d'établir entre elles une relation applicable aux terrains inclinés.

D'ailleurs, en faisant dans cette formule $\operatorname{tg} z = \operatorname{tg} \gamma = 0$ et en y remplaçant $\operatorname{tg} \beta$ par la valeur que nous avons trouvée, nous retombons sur notre formule (49) applicable aux terrains horizontaux.

Les résultats auxquels conduit la théorie exposée sont donc en plein accord avec les constatations faites dans la pratique, et cette théorie permet, à notre avis, de coordonner et d'énoncer mathématiquement des lois dont le praticien du drainage n'avait qu'une connaissance empirique et approximative.

CONCLUSIONS.

Nous avons, au cours du présent travail, vérifié les lois déjà énoncées de l'écoulement souterrain des eaux dans les limites et les conditions rencontrées pratiquement. Nous avons pu constater que la loi de Darcy restait applicable même pour les très faibles pentes motrices que l'on rencontre fréquemment dans les nappes souterraines.

Nous avons également recherché s'il n'y avait pas d'autres lois qu'il était nécessaire de faire intervenir lors de l'étude des nappes de petite étendue. Nous avons ainsi pu formuler les lois relatives à la capillarité et à la perméabilité du sol.

Une vérification d'ensemble de ces lois, faite en comparant les graphiques d'écoulement tracés par un appareil enregistreur et les mêmes courbes calculées en appliquant les lois trouvées, nous a permis de constater l'exactitude de ces lois pour l'écoulement dans des terrains dont les éléments ne sont pas très gros.

Nous avons ensuite présenté une méthode pratique de mesure des constantes caractéristiques d'un sol.

Puis, nous avons appliqué ces résultats au calcul de la forme et du débit des nappes souterraines d'assez faible étendue, pour que les constantes spécifiques du sol y gardent la même valeur. Les résultats ainsi trouvés coïncident avec ceux obtenus pratiquement dans les expériences de Delacroix.

En résumé, nous nous sommes attaché, en partant des lois simples et fondamentales de l'hydrodynamique souterraine, à arriver, par l'intermédiaire du calcul, à l'étude de l'écoulement d'une nappe de faible étendue, en vérifiant, chaque fois que cela était possible, les résultats obtenus, soit par les expériences que nous faisons, soit par celles faites antérieurement.

Certes, notre travail est incomplet, et de nombreux points restent encore à examiner, par exemple :

L'influence des forces vives dans le mouvement de l'eau à travers les très gros sables ;

La variation du coefficient de perméabilité dans ces sables ;

La variation des trois constantes spécifiques du sol avec les dimensions des éléments constitutifs.

Nous serons bien récompensé de notre travail si, par cette étude, nous avons permis à l'ingénieur de calculer par des formules relativement simples, et d'obtenir avec une exactitude suffisante pour la pratique, les bases nécessaires à l'établissement de bien des projets.

Nous ne voudrions pas terminer cette étude sans adresser nos vifs remerciements à toutes les personnes qui nous ont aidé dans notre travail, et en particulier à M. Kœnigs, membre de l'Institut, qui nous a fait l'honneur de bien vouloir accepter de diriger nos recherches; à M. Pélissier, inspecteur général du Génie rural, qui a mis à notre disposition la Station expérimentale d'hydraulique agricole; à MM. Provost, ingénieur en chef du Génie rural, et Crochetelle, directeur de la Station agronomique d'Amiens, qui, lors de nos expériences de 1921 à Amiens, nous ont aidé dans notre tâche par leur connais-

sance de la question et par la mise à notre disposition de la Station agronomique.

BIBLIOGRAPHIE

1863. DUPUIT. — Études théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux. Dunod, à Paris.
1881. J. BRUNHES. — Passage des liquides à travers les substances perméables et les couches filtrantes. Douladoure Privat, à Toulouse.
1882. L. FAURE, inspecteur des améliorations agricoles. — Drainage et assainissement agricole des terres. Ch. Béranger, à Paris.
1904. J. BOUSSINESQ. — Recherches théoriques sur l'écoulement des nappes d'eau infiltrées dans le sol et sur le débit des sources. Compléments à cette étude (*Journal de mathématiques pures et appliquées*, fascicule IV, 1904, p. 5 à 78 et 363 à 394).
1905. E. MAILLET, ingénieur en chef des ponts et chaussées. — Essais d'hydraulique souterraine et fluviale. Hermann, à Paris.
1905. L. POCHE, inspecteur général des ponts et chaussées. — Hydraulique des nappes aquifères et des sources et application pratique. Imprimerie nationale.
1909. A. BOULANGER. — Hydraulique générale. Octave Doin et fils, à Paris.
1915. J. BOUSSINESQ. — Calcul des vitesses bien continues de régime uniforme par des polynômes dans les tubes cylindriques de formes diverses avec application à une évaluation approximative du coefficient de débit dans la filtration de l'eau à travers des sables à grain plus ou moins fin (*Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, janvier 1915).
1915. J. BOUSSINESQ. — Phénomènes permanents de filtration (*Journal de mathématiques pures et appliquées*, fascicule III, 1915, p. 285 à 289).

TABLE

INTRODUCTION	Pages. 1
--------------------	-------------

PREMIÈRE PARTIE

Vérification et recherche expérimentale des lois d'écoulement souterrain des eaux.

I. — Description des dispositifs expérimentaux utilisés.....	6
II. — Vérification pour des pentes motrices inférieures à l'unité de la loi de filtration énoncée par Darcy.....	20
III. — Influence de la capillarité.....	28
IV. — Mesure de la fraction de volume d'un terrain perméable occu- pé par l'eau en mouvement. Coefficient de perméabilité...	42
V. — Vérification d'ensemble des résultats ci-dessus.....	46

DEUXIÈME PARTIE

Procédés pratiques de mesure des constantes spécifiques d'un terrain.....

54

TROISIÈME PARTIE

Application des résultats précédents à l'étude du mouvement des nappes aquifères souterraines.

I. — Résumé des chapitres précédents et objet du présent cha- pitre	59
II. — Étude générale d'une nappe cylindrique à débit constant et à régime uniforme coulant dans un sol homogène sur un fond imperméable	64
III. — Étude de cas particuliers :	
a. Le fond est horizontal	65
b. Le fond est parabolique	72
c. Le fond est logarithmique	74

	Pages.
IV. — Étude générale d'une nappe cylindrique à régime propre non influencé coulant dans un sol homogène sur un fond imperméable, le débit de la nappe n'étant pas limité.....	78
V. — Cas particulier d'un fond imperméable horizontal.....	79
VI. — Étude générale d'une nappe cylindrique à régime propre non influencé coulant dans un sol homogène sur un fond imperméable, le débit étant limité supérieurement.....	85
VII. — Cas particulier d'un fond imperméable horizontal.....	87
VIII. — Comparaison des résultats théoriques ci-dessus avec les résultats d'expérience.....	91
IX. — Considérations pratiques. Application au drainage.....	96
Conclusions	102
Bibliographie	104

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Calcul de l'établissement des réseaux électriques.

Vu et approuvé :

Paris, le 28 avril 1923.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

M. MOLLIARD.

Vu et permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

P. APPELL.

367-23. — CORBEIL. — IMPRIMERIE CRÉTÉ.
